Univerzita Karlova
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Problémy žáků střední školy při řešení konstrukčních úloh

Problems of pupils of high school in solving geometric construction exercises

Bc. Miroslava Dyntarová

Vedoucí práce: Mgr. Michal Zamboj, Ph.D.

Studijní program: Specializace v pedagogice

Studijní obor: Učitelství všeobecně vzdělávacích předmětů pro základní školy a střední školy – matematika

Praha 2021

Odevzdáním této práce na téma Problémy žáků střední školy při řešení konstrukčních úloh potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 19. 4. 2021 ....

Podpis autora

Ráda bych poděkovala Mgr. Michalu Zambojovi, Ph.D. za cenné rady a připomínky, za laskavý a vstřícný přístup, za podporu a zájem o moji práci. Velmi si vážím času, který věnoval pečlivé kontrole mé práce. Dále bych chtěla poděkovat prof. RNDr. Nadě Vondrové, Ph.D. za pomoc při tvorbě a realizaci hlavního výzkumu v mé práci, za její nápady a vedení.

Název práce: Problémy žáků střední školy při řešení konstrukčních úloh

Autor: Miroslava Dyntarová

Katedra: Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Michal Zamboj, Ph.D., katedra matematiky a didaktiky matematiky

Abstrakt: Cílem této diplomové práce je odhalit různé chyby a problémy, které mohou mít žáci středních škol s konstrukčními úlohami v trojúhelníku. Práce je pro přehlednost rozdělena na dvě části. V teoretické části se věnujeme konstrukčním úlohám obecně, jejich různým metodám řešení i formálním postupům, které doporučují středoškolské učebnice. Dále se soustředíme na množiny bodů dané vlastnosti (taktéž na ty, které jsou součástí středoškolského učiva), uvádíme jejich definice, základní vlastnosti a také úlohy, ve kterých se při řešení dané množiny bodů využívají. Naši práci jsme pro lepší porozumění jednotlivým množinám bodů i demonstrovaným úlohám doplnili o množství obrázků, které autorka vytvořila v programu GeoGebra. Ve zbývající kapitole teoretické části se zabýváme představením různých problémů žáků při řešení konstrukčních úloh, které předpokládáme, že se během výzkumu u žáků projeví. Na ně jsme se při výzkumu soustředili. Přípravu výzkumu, jeho realizaci i analýzu sesbíraných dat popisujeme v praktické části. Provedli jsme výzkum s 10 žáky, kterým jsme předložili vybrané geometrické úlohy a zkoumali jsme jevy, které ovlivňují správnost jejich řešení. S každým žákem po jeho samostatné práci vedla organizátorka rozhovor, který odhalil další problémy v jejich řešení. Na závěr uvádíme výsledky našeho šetření a navrhujeme tipy, jak těmto žákovským chybám v budoucnu předcházet. Ve výsledcích zmiňujeme i takové žákovské chyby a nedostatky, které jsme u nich nepředpokládali, a přesto se v jejich řešeních objevily.

Klíčová slova: konstrukční úlohy v trojúhelníku, množiny bodů dané vlastnosti, žáci středních škol

Title: Problems of pupils of high school in solving geometric construction exercises

Author: Miroslava Dyntarová

Department: Department of Mathematics and Mathematical Education

Supervisor: Mgr. Michal Zamboj, Ph.D., Department of Mathematics and Mathematical Education

Abstract: The aim of this thesis is to reveal various errors and issues that high school students face in triangle construction problems. The thesis is divided into two parts for clarity. In the theoretical part we deal with construction problems in general and look into their various solution methods and formal procedures recommended by high school textbooks. Next, we focus on sets of points of a given property (that are part of the high school curriculum), give related definitions, basic properties and use cases. For better understanding of the demonstrated problems the thesis is filled with auxiliary graphs made in the program GeoGebra. In the last chapter of the theoretical part, we introduce various problems that are expected to occur during geometry construction problem solving by students themselves. Those were the main focus of the following study. The preparation of the study, its implementation and subsequent analysis of collected data is described in the practical part of the thesis. The study was conducted with 10 students. Each of them was presented with selected geometric problems and we investigated the phenomena that affected the accuracy of their solutions. After their individual work, each student was interviewed and other issues with their solutions were revealed. At the end we present our findings and suggest tips on how to prevent these errors in the future. We also mention students' mistakes and shortcomings that we did not expect and yet found in their solutions.

Keywords: triangle construction problems, sets of points of a given property, high school students

Obsah

Úvod

Konstrukční úlohy jsou pro některé žáky středních škol částí matematiky, která nemá v reálném světě své využití. Ale jsou to právě konstrukční úlohy, které učí žáky hledat a propojovat souvislosti, oddělovat podstatné informace od nadbytečných, zlepšovat jejich jemnou motoriku a přesnost rýsování. Navíc učí žáky dokazovat, neboť zadání konstrukční úlohy lze přeformulovat následujícím způsobem: „dokažte, zda z těchto zadaných prvků lze sestrojit trojúhelník.“ Vedou tedy žáky k argumentaci a hlubšímu porozumění rovinné geometrii. Ale proč jsou právě konstrukční úlohy pro žáky obávanou a pro mnohé z nich neoblíbenou částí matematického učiva?

My se v naší práci zaměříme na zvládnutí vyřešení konstrukční úlohy žáky s tím, že předpokládáme, že nějaké základní konstrukce už žáci umí narýsovat z dřívějších poznatků, např. kolmice, výšky, těžnice a úhly dané velikosti. Navíc jim k tomu povolíme rýsovací pomůcky, které žáci v praxi běžně používají. Velkou oporou pro sestavení předpokládaných problémů žáků s konstrukčními úlohami pro nás byly informace získané ze studie Nadi Vondrové a Radky Havlíčkové [23], které se touto problematikou zabývaly u žáků základních škol. My jsme pro náš výzkum vybrali žáky středních škol a bude nás zajímat, zda starší žáci budou mít s konstrukčními úlohami obdobné problémy, nebo se naopak dokáží chybám, které dělají žáci základních škol, vyvarovat.

Pro výzkum jsme určili tři základní otázky, které jsme chtěli na vybraných žácích různých středních škol ověřit pomocí předem určených úloh.

1. Jak žák postupuje při řešení konstrukční úlohy, co chápe jako její výsledek.

2. Jak žák rozumí vyučovaným množinám bodů dané vlastnosti, a zda je v konstrukčních úlohách správně používá.

3. Jaký význam má pro žáka rozbor úlohy. Vyhýbá se používání prototypických útvarů, nedostatečnému značení geometrických prvků v obrázku a chybným úvahám.

Práci jsme rozdělili na teoretickou a praktickou část. V teoretické části uvádíme nejprve základní geometrické pojmy jako jsou úhel, trojúhelník, těžiště apod. a jejich vlastnosti. Dále se věnujeme množinám bodů dané vlastnosti, které jsou součástí učiva na středních školách. Ke každé množině uvádíme základní definice a její vlastnosti, a také vždy jednu konstrukční úlohu, ve které se právě daná množina bodů využije při řešení. Krátce zmíníme i různé metody řešení konstrukčních úloh, které opět demonstrujeme na námi zvolených úlohách. Na závěr se zaměříme na zmíněnou studii [23], díky níž stanovíme další konkrétnější jevy, které by mohly dělat žákům při řešení konstrukčních úloh problémy.

Celou praktickou část budeme věnovat našemu výzkumu o možných problémech žáků s konstrukčními úlohami v trojúhelníku. Nejprve provedeme pilotní studii, podle níž určíme úlohy do studie hlavní. V té se pak několik žáků střední školy pokusí vyřešit zadané úlohy. Na jejich samostatnou práci bude navazovat rozhovor s organizátorkou výzkumu. Dále se budeme věnovat výsledkům obou studií, pokusíme se odpovědět na naše otázky a navrhnout možná řešení do výuky konstrukčních úloh.

Část I

Teoretická část

Kapitola 1

Základní geometrické pojmy

Dříve než se budeme věnovat konstrukčním úlohám, uvedeme několik základních definic dále používaných pojmů a zavedeme terminologii a značení, které budeme používat v celé diplomové práci. Dále zmíníme několik vět a tvrzení, která rozšíří informace o definovaných pojmem. Uvedeme je však bez důkazů, neboť tvoří pouze základ, ze kterého budeme dále čerpat pro vysvětlení a užití stěžejních pojmů. Navíc by zbytečně zvyšovaly objem práce, jejímž nejsou cílem.
Souhrn používaného značení jsme pro přehlednost uvedli v samostatné kapitole *Seznam zkratek*, která se nachází na konci této diplomové práce.

1.1 Úhel, trojúhelník

Začneme pojmem úhel, který budeme definovat pomocí dvou polopřímek.

Definice 1. [4] *Úhel* je systém dvou polopřímek $\overrightarrow{VA}, \overrightarrow{VB}$ se společným počátkem.

Polopřímky $\overrightarrow{VA}, \overrightarrow{VB}$ nazýváme ramena a bod V vrchol úhlu. Takovýto úhel budeme značit $\angle AVB$.

Ve středoškolských učebnicích se však častěji objevuje následující definice.

Definice 2. [16, str. 13] *Úhel* je část roviny, která je ohraničena dvěma různými polopřímkami $\overrightarrow{VA}$ a $\overrightarrow{VB}$ se společným počátkem V.

Rozdíl v uvedených definicích je v tom, že pokud bychom chtěli např. sestrojit průsečík daného úhlu a přímky, tak podle definice 1 vzniknou dva, jeden nebo žádný průsečík, ale podle definice 2 může být jejich průsečíkem celá úsečka bodů.
Poznámka: V české literatuře najdeme ještě další pohled na definování úhlu v rovině.

Definice 3. [17, str. 58] Jsou dány dvě polopřímky p, q se společným počátkem S, které neleží na téže přímce. *Úhlem* rozumíme množinu polopřímek, do níž vedle polopřímek p a q patří každá polopřímka r roviny $\overleftrightarrow{pq}$ s počátkem S, pro kterou platí, že polopřímka r leží mezi polopřímkami p a q.

Tato definice odpovídá definici 2, neboť množina všech polopřímek r, které leží mezi polopřímkami p, q, tvoří opět část roviny ohraničenou danými polopřímkami p, q se společným počátkem S.

Pro potřeby konstrukce trojúhelníků při znalosti vnitřních úhlů nám postačí definice 1, kterou budeme v celé diplomové práci používat.

Abychom mohli s úhlem pracovat, potřebujeme znát jeho velikost, která je určena v závislosti na tzv. *jednotkovém úhlu.* Omezíme se pouze na stupňovou míru, protože velikosti úhlů v zadání konstrukčních úloh jsou ve středoškolských učebnicích uváděny výhradně ve stupních.

Pro definování *jednotkového úhlu* potřebujeme nejprve zadefinovat další typy úhlů.

Definice 4. [19, str. 15] Nechť $\angle AVB$ a $\angle AVC$ jsou dva úhly, které mají společné rameno $\overrightarrow{VA}$ a ramena $\overrightarrow{VB}, \overrightarrow{VC}$ jsou navzájem opačné polopřímky. Pak $\angle AVB, \angle AVC$ nazýváme *úhly vedlejšími.*

Definice 5. [19, str. 15] *Pravý úhel* je takový úhel, který je shodný se svým vedlejším úhlem.

Definice 6. [18, str. 146] *Jednotkový úhel* je ve stupňové míře roven $\frac{1}{90}$ pravého úhlu.

Definice 7. [18, str. 146] *Velikost úhlu* $\angle AVB$ ve stupňové míře je dána nezáporným číslem, které udává, kolikrát je úhel $\angle AVB$ větší, resp. menší než jednotkový úhel.

Dále zadefinujeme trojúhelník, což je rovinný útvar, který je dán třemi nekolineárními body, které nazýváme vrcholy trojúhelníku.

Definice 8. [11, str. 71] Jsou dány tři nekolineární body A, B, C. *Trojúhelník* ABC je průnik polorovin $\overleftrightarrow{ABC}, \overleftrightarrow{BCA}, \overleftrightarrow{ACB}$.

Vrcholy trojúhelníku budeme označovat velkými tiskacími písmeny. Naopak malými psacími písmeny budeme značit délky stran trojúhelníku, což jsou délky spojnic dvou vrcholů trojúhelníku. V trojúhelníku ABC tedy budeme používat následující značení:

$$|AB| = c, |BC| = a, |AC| = b.$$

Abychom mohli libovolný trojúhelník sestrojit, musí platit tzv. trojúhelníková nerovnost, tedy že součet libovolných dvou délek stran trojúhelníku je větší než délka strany zbývající. Tyto tři nerovnosti jsou shrnuty v následující větě.

Věta 1. *[19, str. 25] Úsečky o délkách a, b, c jsou stranami trojúhelníku, právě když platí*

$$|b - c| < a < b + c.$$

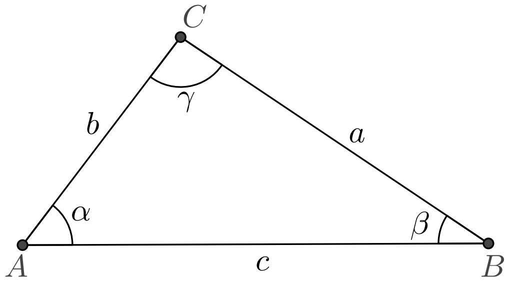
Podle velikostí stran dělíme trojúhelníky na
- rovnostranné, které mají stejné délky všech tří stran ($a = b = c$),
- rovnoramenné, které mají dvě strany stejně dlouhé,
- různostranné, které mají různé délky stran ($a \neq b \neq c$).

V každém trojúhelníku ABC lze určit tři úhly a to $\angle BAC, \angle ABC, \angle BCA$, které nazýváme vnitřními úhly trojúhelníku ABC. Jejich velikosti budeme značit písmeny malé řecké abecedy (viz obrázek 1.1).

Podle velikostí vnitřních úhlů dělíme trojúhelníky na
- ostroúhlé právě tehdy, když všechny úhly $\alpha, \beta, \gamma < 90°$,
- pravoúhlé právě tehdy, když velikost jednoho úhlu je rovna $90°$,
- tupoúhlé právě tehdy, když velikost jednoho úhlu je větší než $90°$.

Nyní uvedeme několik vlastností, které budeme využívat při určování řešitelnosti daných konstrukčních úloh.

Věta 2. *Součet velikostí vnitřních úhlů v trojúhelníku je roven* $180°$.



Obrázek 1.1: Značení stran a úhlů v trojúhelníku

Věta 3. *Proti delší straně v trojúhelníku leží větší vnitřní úhel, a naopak proti většímu vnitřnímu úhlu v trojúhelníku leží delší strana.*

Důsledkem této věty je, že proti shodným stranám v trojúhelníku leží shodné vnitřní úhly.

1.2 Těžnice, výška

Abychom mohli zadefinovat pojem těžnice, potřebujeme nejprve znát pojem *střed strany* trojúhelníku.

Definice 9. *Střed strany* AB trojúhelníku ABC je bod $X \in AB$, pro který platí $|AX| = |BX|$.

To znamená, že v každém trojúhelníku lze sestrojit tři středy stran, které značíme A_1, B_1, C_1 po řadě odpovídající stranám a, b, c.

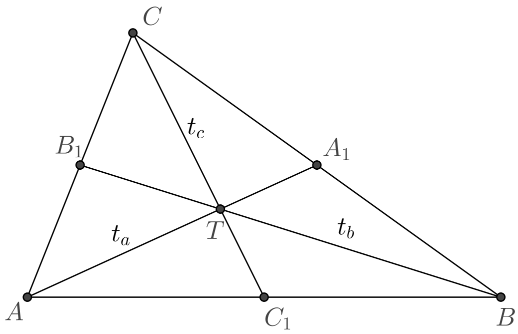
Definice 10. [11, str. 72] Každá úsečka, jejíž krajními body jsou vrchol trojúhelníku a střed jeho protilehlé strany, se nazývá *těžnice* trojúhelníku.

V každém trojúhelníku lze sestrojit tři těžnice, které budeme značit t_a, t_b, t_c podle vrcholu, který je jejich krajním bodem.

Věta 4. *[21, str. 23] Těžnice v trojúhelníku procházejí týmž bodem.*

Tento bod nazýváme *těžiště* trojúhelníku a značíme ho T (viz obrázek 1.2). Těžiště trojúhelníku leží vždy uvnitř trojúhelníku a platí následující věta.

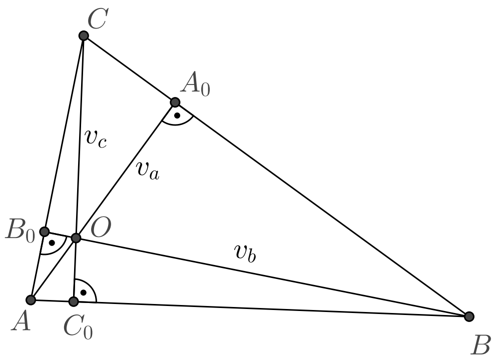
Věta 5. *[21, str. 24] Těžiště trojúhelníku dělí každou z těžnic v poměru 2:1, přičemž delší úsek leží blíže příslušnému vrcholu trojúhelníku.*



Obrázek 1.2: Těžiště trojúhelníku

Dále se budeme zabývat pojmem výška trojúhelníku.

Definice 11. [18, str. 359] Úsečka, jejímiž krajními body jsou vrchol trojúhelníku a pata kolmice vedená tímto vrcholem k jeho protější straně, se nazývá *výška* trojúhelníku.

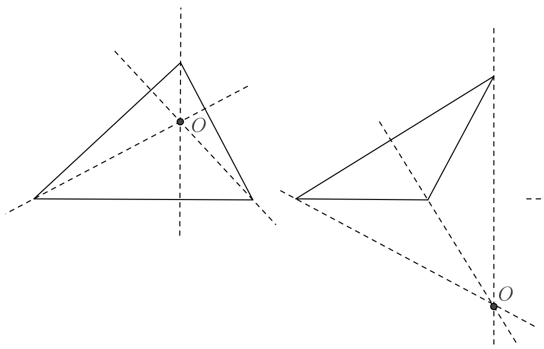


Obrázek 1.3: Výšky v trojúhelníku

Věta 6. *[21, str. 26] Výšky v trojúhelníku procházejí týmž bodem, který nazýváme ortocentrum.*

Výšky příslušné po řadě stranám a, b, c v trojúhelníku značíme v_a, v_b, v_c, jim příslušné paty označíme A_0, B_0, C_0 a ortocentrum O (viz obrázek 1.3).

Ortocentrum na rozdíl od těžiště nemusí ležet uvnitř trojúhelníku. V tupoúhlém trojúhelníku leží mimo trojúhelník a v pravoúhlém je shodné s vrcholem, u něhož je pravý úhel (viz obrázek 1.4).

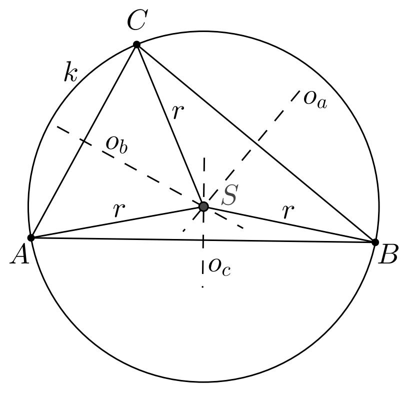


Obrázek 1.4: Umístění ortocentra v různých trojúhelnících

Vzájemná poloha výšek a těžnic se v různých typech trojúhelníků liší. V rovnostranném trojúhelníku výšky a příslušné těžnice splynou, což znamená, že splynou i ortocentrum a těžiště. V rovnoramenném trojúhelníku splyne pouze výška a těžnice vedené z vrcholu proti základně, ostatní jsou různé. Ortocentrum a těžiště nesplývají, ale leží na výšce kolmé k základně.

1.3 Kružnice opsaná a vepsaná

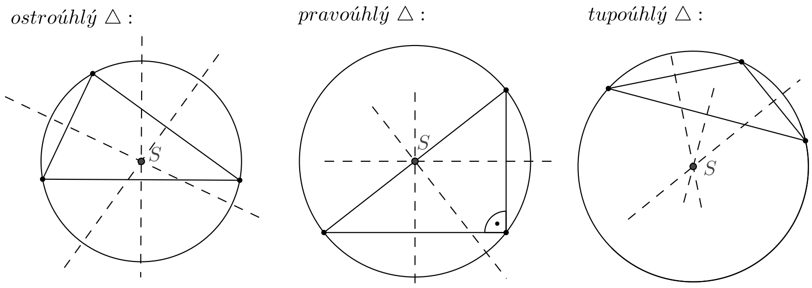
Libovolnému trojúhelníku lze vždy opsat i vepsat kružnici. Definici kružnice uvedeme v kapitole *Konstrukční úlohy* (viz definice 13).



Obrázek 1.5: Kružnice trojúhelníku opsaná

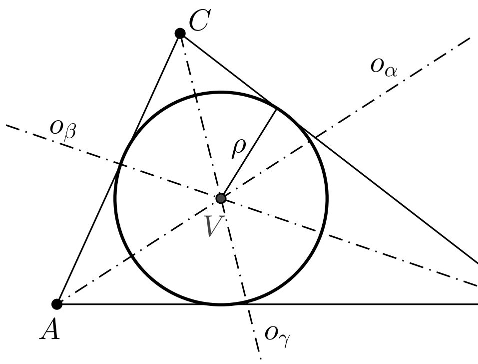
Kružnice opsaná prochází všemi vrcholy trojúhelníku. Její střed je průsečík os stran (viz definice 16) trojúhelníku, značíme ho S, a poloměr r je roven délce spojnice libovolného vrcholu se středem S. Ilustrace kružnice opsané je znázorněna na obrázku 1.5.

Střed kružnice opsané leží v případě ostroúhlého trojúhelníku uvnitř trojúhelníku, v tupoúhlém trojúhelníku vně a v pravoúhlém trojúhelníku splývá se středem přepony (viz obrázek 1.6).



Obrázek 1.6: Umístění středu kružnice opsané v různých trojúhelnících

Kružnice vepsaná se dotýká všech stran trojúhelníku a to vždy v jejich vnitřních bodech. Její střed je průsečík os vnitřních úhlů (viz definice 21) trojúhelníku, značíme ho V, a poloměr ρ je roven vzdálenosti středu kružnice vepsané od libovolné strany trojúhelníku (viz obrázek 1.7).
Střed kružnice vepsané leží vždy uvnitř daného trojúhelníku.



Obrázek 1.7: Kružnice trojúhelníku vepsaná

V rovnostranném trojúhelníku splývá střed kružnice vepsané se středem kružnice opsané, s těžištěm trojúhelníku i s ortocentrem.

Kapitola 2

Konstrukční úlohy

Ve vyučování geometrie na základních a středních školách měly konstrukční úlohy vždy důležité místo. V šedesátých letech minulého století pod vlivem bourbakistických tendencí došlo k jejich vyloučení z učiva. V posledních letech se však situace změnila a konstrukčním úlohám se opět věnuje zvýšená pozornost. Což kvituje i Hejný, který ve své publikaci [6, str. 327] vyjmenovává důležité aspekty konstrukčních úloh, které umožňují žákův rozvoj. Konstrukční úlohy

- poskytují krásné motivační úlohy, které podněcují zvědavost žáků a vedou je k samostatnému objevování zákonitostí,
- ukazují žákovi jasný cíl – sestrojte – na rozdíl od vět a důkazů, jejichž význam a smysl bývá žákovi nejasný,
- jsou přirozeným mostem, po kterém mohou žákovi předcházející manuální zkušenosti přejít do jeho geometrické struktury,
- ukazují, jak je možné využít teoretické poznatky v praxi,
- přispívají k interiorizaci pojmů a vět,
- rozvíjejí schopnost pochopení vztahu mezi teorií a praxí,
- jsou pro učitele vhodným testovacím prostředkem, pomocí kterého může diagnostikovat kvalitu neformálních znalostí žáka.

Konstrukční úlohy jsou tedy nezbytnou součástí matematiky, která rozvíjí žákovi kompetence. Přesto jsou pro žáky kritickou oblastí, kterou nedokáží uchopit a mají problémy s porozuměním a pochopením celé problematiky.

2.1 Konstrukční úlohy v trojúhelníku a jejich postup řešení

Nacházíme se v rovině (označme ji ρ), tedy v dvojrozměrném euklidovském prostoru, kde jsou zadány určité prvky a my máme pomocí pravítka a kružítka sestrojit daný útvar. V naší práci se budeme soustředit na úlohy konstrukce trojúhelníku. Zadány musí být alespoň 3 prvky, které mají určené kladné velikosti. Na úrovni střední školy se jedná o strany, těžnice, výšky, úhly a poloměry kružnice opsané či vepsané. Tyto prvky mohou být v zadání nahrazeny vztahy mezi prvky, například součtem délek dvou stran trojúhelníku $(a + b)$, nebo rozdílem délek strany a výšky $(b - v_c)$. Konstruovatelnost trojúhelníku však vždy záleží na kombinaci těchto prvků popř. vztahů mezi prvky.

Při zvolení určité kombinace tří prvků, např.: a, b, ρ, nebo v_a, t_b, r, trojúhelník v euklidovském prostoru sestrojit nelze. Neznamená to však, že trojúhelník neexistuje, lze ho sestrojit v jiném prostoru nebo za použití jiných pomůcek (nejen kružítka a pravítka). Dalším faktorem, který ovlivňuje konstruovatelnost trojúhelníku, je znalost konkrétní velikosti zadaných prvků. Může nastat případ, že hledaný trojúhelník vůbec neexistuje, protože v něm není splněna trojúhelníková nerovnost, nebo jiná vlastnost existence trojúhelníku. Příkladem může být trojice prvků c, t_c, α, které mají následující velikosti $c = 5\ cm, t_c = 2\ cm$ a $\alpha = 60°$.

Ve středoškolských učebnicích matematiky autoři většinou nepoužívají označení euklidovský prostor, dokonce ani nespecifikují, co myslí pojmem pravítko. Vondra [22, str. 93] vysvětluje pojem euklidovské konstrukce, jako konstrukce, kterou lze provést pouze pomocí pravítka bez rysky a kružítka. Pro zajímavost také uvádí tzv. mascherovské konstrukce, což jsou konstrukce provedené pouze pomocí kružítka. Kuřina [11, str. 183] uvádí souhrn úmluv, které máme využívat při konstrukcích v euklidovském prostoru:

- Libovolný počet bodů můžeme zvolit.
- Pomocí pravítka můžeme sestrojit přímku, která prochází danými dvěma body.
- Pomocí kružítka můžeme sestrojit kružnici, která má střed v daném bodě a prochází dalším daným bodem, nebo má daný poloměr.
- Jsou-li sestrojeny dva geometrické útvary, je sestrojen i jejich průnik, sjednocení a rozdíl.
- Každou z uvedených konstrukcí můžeme v libovolném (konečném) počtu opakovat.
- Žádné další konstrukce nepřipouštíme.

Pravítko je tedy chápáno pouze jako pomůcka pro sestrojení přímek. Nejedná se tedy o pravítko trojúhelníkové, s ryskou nebo jiné pomocné pravítko. V praxi však žáci využívají k řešení konstrukčních úloh nejen přímé pravítko a kružítko, ale i trojúhelníkové pravítko s ryskou nebo úhloměr. Zjednoduší si tím například rýsování kolmic, rovnoběžek či úhlů dané velikosti. Bylo by určitě zajímavé zkoumat, zda žáci středních škol dokáží vyřešit nějakou konstrukční úlohu pouze pomocí přímého pravítka a kružítka, ale to není cílem této práce.

V učebnici [25, str. 183] autoři upozorňují na fakt, že cílem konstrukční úlohy není narýsování daného útvaru, ale vytvoření tohoto útvaru. Chápou rýsovací náčiní jako prostředek k narýsování křivek, které jsou nezbytné k sestrojení hledaného útvaru. Jsou jimi přímky a kružnice. Podle této skutečnosti definují příslušné úmluvy:

- Přímku pokládáme za sestrojenou, jsou-li sestrojeny dva její body.
- Kružnici pokládáme za sestrojenou, je-li její střed sestrojený bod a je-li její poloměr dán dvěma sestrojenými body.
- Bod pokládáme za sestrojený, je-li jím některý z výchozích bodů nebo je-li společným bodem dvou sestrojených základních křivek navzájem různých.

Pomocí kombinování těchto úkonů, a žádných jiných, lze sestrojit hledaný útvar euklidovskými konstrukcemi. Samozřejmě euklidovské konstrukce nejsou jediné, se kterými se žáci na střední škole setkají, ale tvoří její podstatnou část.

Pro určení typů konstrukčních úloh neexistuje jednotná konvence, nejčastěji jsou však děleny na **polohové** a **nepolohové** úlohy (viz [19, 100]). Polohové jsou ty, u nichž je alespoň jeden zadaný prvek umístěn v rovině. Při řešení takovéto úlohy musíme nejdříve sestrojit daný prvek a teprve potom, za pomoci zbývajících zadaných prvků, sestrojit hledaný trojúhelník. Naopak nepolohové konstrukční úlohy mají zadány prvky, ze kterých sestrojujeme hledaný trojúhelník, ale není zadána jejich poloha. Závisí tedy pouze na rozhodnutí řešitele, v jaké posloupnosti bude tyto prvky k řešení úlohy využívat.

Prvky konstrukční úlohy mohou být zadány konkrétními číselnými hodnotami nebo obecně jako prvky s parametrem. Při řešení obecných úloh předpokládáme všechny možnosti parametru a existenci a počet řešení určujeme v závislosti na parametru. Rýsování provádíme pro zvolené hodnoty jednotlivých prvků. Jedná-li se však o úlohu s konkrétně zadanými prvky, využíváme tyto hodnoty při rýsování. Řešení tak odpovídá přesně zadání úlohy.

Řešení konstrukční úlohy rozdělujeme do čtyř fází (rozbor, popis a provedení konstrukce, ověření správnosti – zkouška a diskuse řešitelnosti s určením počtu řešení úlohy). Toto rozdělení je typické pro většinu učebnic základních i středních škol v České republice. My jsme čerpali z publikací [13] a [25].

1. **Rozbor**

   Předpokládáme, že hledaný trojúhelník existuje a lze ho sestrojit. Pro co nejlepší vizualizaci využijeme náčrt výsledného trojúhelníku a vyznačíme do něho zadané prvky. Skrze ně a další vlastnosti trojúhelníku analyzujeme danou geometrickou situaci. Výsledkem rozboru je pak zápis, který obsahuje zdůvodnění postupu, jak hledaný trojúhelník sestrojit. K tomu lze využít kombinaci symbolických zápisů a slovního komentáře.

2. **Popis a provedení konstrukce**

   Tato fáze navazuje na rozbor a má dvě části: popis konstrukce a samotnou konstrukci. V popisu konstrukce vycházíme ze závěrů rozboru a krok za krokem popisujeme konstrukci trojúhelníku. Jedná se hlavně o symbolický zápis jednotlivých konstrukčních kroků, pomocí něhož lze od zadaných geometrických prvků zkonstruovat hledaný trojúhelník daných vlastností. Pro každý hledaný bod zpravidla uvádíme dvě množiny bodů, jejichž je průnikem. Podle sestaveného popisu konstrukce narýsujeme hledaný trojúhelník. Při samotné konstrukci se může stát, že průnik dvou množin nevznikne jeden, ale dva nebo více. Pak pokračujeme v konstrukci buď se všemi těmito body, nebo provedeme konstrukci pouze s jedním bodem. To záleží na dohodě. Také může nastat situace, kdy dvě množiny nebudou mít žádný průnik. V tomto případě konstrukční úloha nemá řešení a v konstrukci už dále nepokračujeme.

3. **Zkouška správnosti**

   Může se stát, že námi narýsované trojúhelníky nevyhovují zadání úlohy, proto je nutné provést kontrolu správnosti a takovéto trojúhelníky z řešení vyloučit. Postupujeme tak, že procházíme jednotlivé kroky konstrukce a ověřujeme, zda nedošlo k porušení podmínek zadání. Zkoušku lze však vynechat, jak uvádí Leischner [13, str. 4], pokud v rozboru provedeme zdůvodnění správnosti a následná správnost konstrukce je určena jednoznačně. Také nám může pomoci diskuse o existenci řešení, která obsahuje podmínky (včetně důkazu) pro hodnoty vyhovující řešení úlohy.

4. **Diskuse řešitelnosti a počtu řešení**

   Dříve než budeme určovat počet řešení dané konstrukční úlohy je nutné zamyslet se nad jeho existencí. Jedná-li se o úlohu zadanou konkrétními hodnotami, existenci trojúhelníku prokáže jeho narýsování. U úloh zadaných parametricky musíme zanalyzovat každý krok popisu konstrukce a určit jeho existenci a jednoznačnost. To nám umožní určit podmínky řešitelnosti dané úlohy.

   Počet řešení konstrukčních úloh nemá jednotná pravidla, proto lze u různých autorů nalézt odlišné počty řešení totožné konstrukční úlohy. My budeme v naší práci využívat pravidlo, že počet řešení je dán počtem všech vyhovujících různých řešení dané úlohy. Navíc budeme rozlišovat, o jaký typ úlohy se jedná. U polohových úloh, kde je dáno umístění nějakého prvku v rovině, započítáme do řešení všechny trojúhelníky, které jsou různé, tedy nejsou totožné. U nepolohových úloh jsou řešením jen ty trojúhelníky, které nejsou shodné.

Jedná-li se o úlohu parametrickou, musíme provést závěrečnou diskusi počtu řešení, tedy v závislosti na volbě parametru zadaných prvků určíme počet řešení. Pro přehlednost můžeme výsledky uspořádat do jednoduché tabulky.

2.2 Množiny bodů dané vlastnosti a jejich konstrukce

Konstrukční úlohy v trojúhelníku lze řešit různými metodami, např.: pomocí shodných zobrazení, pomocí algebraického výpočtu, využitím podobnosti. Ve výzkumu naší práce se budeme zabývat konstrukcemi trojúhelníků při využití množin bodů dané vlastnosti, proto je nyní představíme. Využijeme k tomu konkrétní konstrukční úlohy, na kterých zároveň demonstrujeme postup při jejich řešení.
Jednotlivé úlohy jsme vybrali z publikací [5], [8] a [19].

Množinou bodů dané vlastnosti rozumíme všechny body euklidovské roviny ρ, které splňují danou vlastnost a zároveň musí platit, že žádný jiný bod roviny ρ danou vlastnost nesplňuje.

Definice 12. [19, str. 90] Množina M všech bodů roviny ρ, které mají danou vlastnost, je množina všech bodů, pro kterou současně platí:

1. Každý bod množiny M má danou vlastnost.
2. Každý bod roviny ρ, který má danou vlastnost, patří do množiny M.

V této práci uvedeme pouze ty množiny bodů dané vlastnosti, které se objevují v učebnicích středních škol, konkrétně v učebnici [19].

2.2.1 Kružnice

Definice 13. [2, str. 64] *Kružnice* je množina všech bodů roviny ρ, které mají od pevného bodu S danou vzdálenost r.

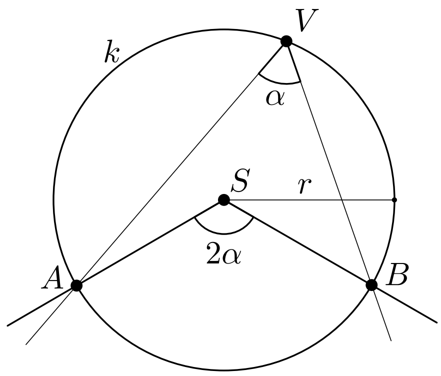
Kružnice je zároveň množinou všech středů kružnic, které mají poloměr r a procházejí bodem S ([18, str. 408]).

Bod S nazýváme střed kružnice a r jejím poloměrem. Libovolné body A, B, které leží na kružnici, rozdělí kružnici na dva tzv. kružnicové oblouky, které se rovnají, pokud úsečka AB prochází středem kružnice. Pak tyto oblouky nazýváme půlkružnice. Symbolický zápis kružnice:

$$k(S; r) = \{X \in \rho : |XS| = r\}.$$

Konstrukci kružnice provádíme pomocí kružítka, díky němuž opíšeme kolem daného středu S křivku o poloměru r.

Ještě než představíme úlohu, která demonstruje použití kružnice v řešení konstrukční úlohy, zadefinujeme pojmy středový a obvodový úhel, které budeme v následujících částech naší práce potřebovat zejména při důkazech některých tvrzení.



Obrázek 2.1: Kružnice, středový a obvodový úhel

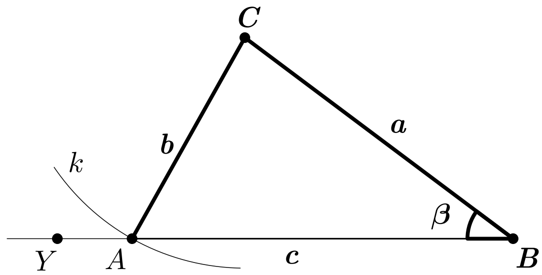
Definice 14. [19, str. 59] Úhel, jehož vrcholem je střed S kružnice k a ramena procházejí krajními body oblouku A, B $(A, B \in k)$ kružnice k, se nazývá *středový úhel* příslušný k tomu oblouku AB, který v tomto úhlu leží (viz obrázek 2.1).

Definice 15. [19, str. 60] Každý úhel $\angle AVB$, jehož vrchol V je bodem kružnice k a ramena procházejí krajními body oblouku AB $(A, B \in k)$ kružnice k $(V \neq A, V \neq B)$, se nazývá *obvodový úhel* příslušný k tomu oblouku AB, který v tomto úhlu leží (viz obrázek 2.1).

Věta 7. *[19, str. 61] Velikost středového úhlu je rovna dvojnásobku velikosti obvodového úhlu příslušnému k témuž oblouku.*

Úloha 1. Je dána úsečka BC ($|BC| = 4\ cm$). Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, pro které platí: $b = 2\ cm$, $\beta = 30°$.

Řešení: Jedná se o polohovou úlohu, tedy začneme umístěním úsečky BC do roviny.
Rozbor: (viz obrázek 2.2)
Úsečka BC je dána, zbývá nám nalézt bod A. Ten leží na množině všech bodů roviny, které mají od bodu C vzdálenost b, tedy leží na kružnici se středem v bodě C a poloměrem b. Vrchol A je zároveň bodem polopřímky $\overrightarrow{BY}$, která je jedním ramenem úhlu $\angle CBY$ o velikosti β.



Obrázek 2.2: Náčrt k úloze 1

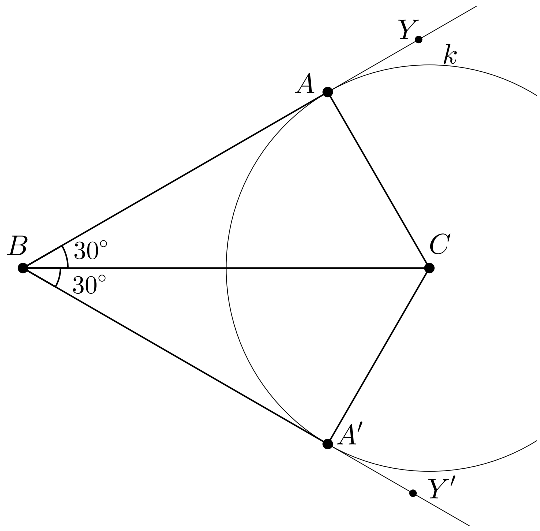
Naše úvahy lze zapsat zkráceně a pomocí symboliky následujícím způsobem:

1) Sestrojíme úsečku BC.
2) $A \in k(C, b) \wedge A \in \overrightarrow{BY}$, kde $|\angle CBY| = \beta$.

Popis konstrukce:

1. $BC; |BC| = 4\ cm$
2. $\overrightarrow{BY}; |\angle CBY| = 30°$
3. $k; k(C, 2\ cm)$
4. $A; A \in \overrightarrow{BY} \cap k$
5. $\triangle ABC$

Zkouška: Všechny body konstrukce vyhovují zadaným podmínkám, konstrukce je tedy správná. Existence trojúhelníku je prokázána konstrukcí trojúhelníku na obrázku 2.3.



Obrázek 2.3: Konstrukce úlohy 1

Počet řešení: U této polohové úlohy s konkrétně zadanými prvky závisí počet řešení na počtu průsečíků polopřímky $\overrightarrow{BY}$ a kružnice k. Z obrázku 2.3 je zřejmé, že úloha má 2 řešení. Druhé řešení vznikne nejednoznačností konstrukce polopřímky $\overrightarrow{BY}$ ve 2. kroku konstrukce.

2.2.2 Osa úsečky

Definice 16. [19, str. 90] *Osa úsečky AB* (viz obrázek 2.4) je množina všech bodů roviny ρ, které mají od daných bodů A, B stejnou vzdálenost.

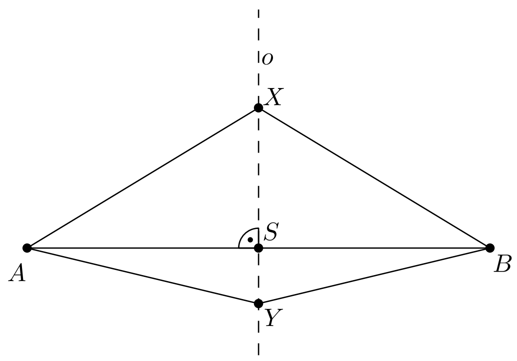
Definici lze zapsat symbolicky

$$o = \{X \in \rho : |XA| = |XB|\}, \text{ kde } \ A \neq B.$$

Tvrzení 1. *Osa úsečky AB je přímka kolmá k úsečce AB a vede jejím středem.*

Důkaz. Zvolme bod S, který je středem úsečky AB a bod $X \neq S$, pro který platí $|AX| = |BX|$ (viz obrázek 2.4). Aby tvrzení platilo musíme dokázat, že

1. libovolný bod X, pro který platí $|AX| = |BX|$, leží na přímce kolmé k AB,



Obrázek 2.4: Osa úsečky

2. pro každý bod Y, který leží na kolmici XS platí, že $|AY| = |BY|$.

Z definice 16 vyplývá, že trojúhelník ABX je rovnoramenný. Pak trojúhelníky AXS a BXS jsou shodné ($|AS| = |BS|$, $|AX| = |BX|$, $|\angle XAS| = |\angle XBS|$). Z věty 2 pro trojúhelník ABX platí, že

$$\begin{aligned} |\angle XAS| + |\angle XBS| + |\angle AXS| + |\angle BXS| &= 180^\circ \\ 2 \cdot |\angle XAS| + 2 \cdot |\angle AXS| &= 180^\circ \qquad / : 2 \\ |\angle XAS| + |\angle AXS| &= 90^\circ \\ \Rightarrow |\angle ASX| &= 90^\circ. \end{aligned}$$

Trojúhelníky AXS a BXS jsou tedy pravoúhlé, proto je úsečka XS kolmá na úsečku AB.
Leží-li Y na kolmici k úsečce AB vedené bodem S, pak jsou trojúhelníky ASY a BSY pravoúhlé a shodné ($|AS| = |BS|$, $|\angle ASY| = |\angle BSY|$ a stranu SY mají společnou). Ze shodnosti vyplývá, že i $|AY| = |BY|$. Bod Y je tedy bodem osy úsečky AB. $\square$

V trojúhelníku ABC lze sestrojit osu ke každé jeho straně. Tyto osy budeme značit o_a, o_b, o_c podle strany, ke které osu sestrojujeme.

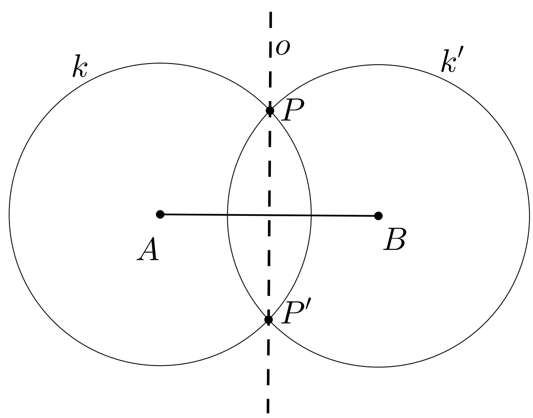
Osu úsečky můžeme chápat též jako množinu všech středů kružnic, které procházejí danými dvěma různými body A, B [18, str. 409].

KONSTRUKCE: (viz obrázek 2.5)

1. Narýsujeme úsečku AB.

2. Sestrojíme kružnici k se středem v bodě A a libovolným poloměrem větším než polovina délky úsečky AB.
3. Sestrojíme kružnici k' se středem v bodě B a stejným poloměrem jako kružnice k.
4. Průsečíky obou kružnic označíme P, P'.
5. Sestrojíme přímku o, která prochází body P, P'.

Sestrojená přímka o je pak konstruovanou osou úsečky AB.



Obrázek 2.5: Konstrukce osy úsečky

Úloha 2. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno $a + b, c, \alpha$.

Řešení: Úloha je nepolohová, proto nejprve jeden ze zadaných prvků umístíme do roviny. Zadání neobsahuje konkrétní číselné hodnoty, budeme v závěru provádět diskusi řešitelnosti.

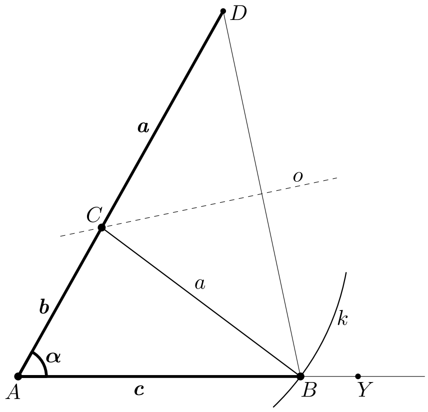
Rozbor: (viz obrázek 2.6)

Pro konstrukci trojúhelníku ABC využijeme konstrukce pomocného trojúhelníku ABD ($|AD| = a + b, |AB| = c, |\angle DAB| = \alpha$). Hledaný bod C leží na přímce $\overleftrightarrow{AD}$ a zároveň na ose úsečky BD, protože trojúhelník BDC je rovnoramenný. Symbolický zápis:

1) Sestrojíme úsečku $|AD| = a + b$.
2) Vrchol $B \in k(A, c) \;\wedge\; B \in \overrightarrow{AY}; |\angle DAY| = \alpha$.
3) Vrchol $C \in \overleftrightarrow{AD} \;\wedge\; C \in o = \{X \in \rho : |XD| = |XB|\}$.

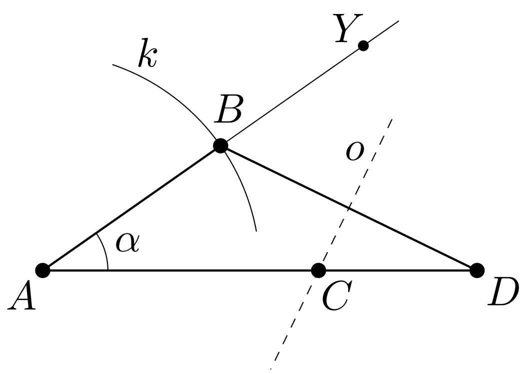
Popis konstrukce:

1. $AD; |AD| = a + b$



Obrázek 2.6: Náčrt k úloze 2

2. k; $k(A, c)$
3. $\overrightarrow{AY}$; $|\angle DAY| = \alpha$
4. B; $B \in \overrightarrow{AY} \cap k$
5. o; $o = \{X \in \rho : |XD| = |XB|\}$
6. $C; C \in o \cap \overleftrightarrow{AD}$
7. $\triangle ABC$



Obrázek 2.7: Konstrukce úlohy 2

Diskuse: Abychom mohli trojúhelník sestrojit (viz obrázek 2.7), musí platit, že vrcholy A, B, a C jsou nekolineární. Protože však pro zadaný úhel α obecně platí, že $0° < \alpha < 180°$, vrcholy nikdy nebudou kolineární.

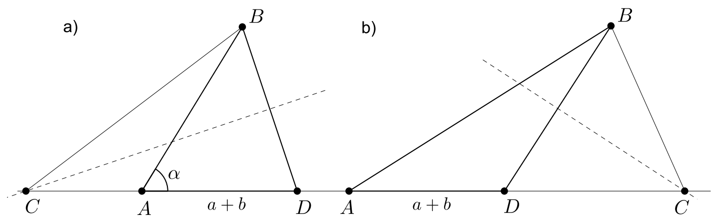
Dále se zaměříme na polohu průsečíku C osy o s přímkou $\overleftrightarrow{AD}$. Leží-li průsečík C mimo úsečku AD nastane jedna ze situací na obrázku 2.8. V případě

a) není splněna podmínka, že $|\angle CAB| = \alpha$,

b) platí, že $|AC| > |AD|$, tedy $b > a + b$, což není pravda.

Průsečík C nemůže ležet ani v krajních bodech úsečky AD, neboť $C \neq A$ (kolineárnost vrcholů) ani $C \neq D$, protože pak by $|AC| = |AD|$, tedy $b = a + b$, což neplatí.

Průsečík C bude tedy vždy ležet uvnitř úsečky AD, takže jedinou podmínkou pro zadané prvky je nerovnost $a + b > c$ (dle věty 1).



Obrázek 2.8: Diskuse úlohy 2

Počet řešení: Tato úloha je nepolohová na rozdíl od úlohy 1. Při rýsování 3. kroku konstrukce můžeme zvolit, jestli úhel α narýsujeme ve směru hodinových ručiček či proti směru, neboť oba sestrojené trojúhelníky budou shodné (osově souměrné), což nezmění počet řešení úlohy. To však neplatí obecně a je důležité u každé obdobné úlohy tuto diskusi provést.

Úloha má právě jedno řešení, pokud platí podmínka řešitelnosti určená v diskusi.

2.2.3 Ekvidistanta přímky

Definice 17. [19, str. 91] *Ekvidistanta přímky a* je množina všech bodů roviny ρ, které mají od dané přímky a danou vzdálenost $d > 0$.

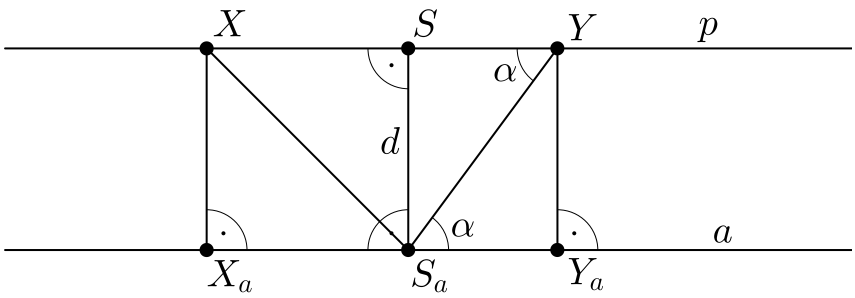
Tvrzení 2. *[19, str. 91] Ekvidistanta přímky a je dvojice přímek p, p' rovnoběžných s přímkou a, ležících v opačných polorovinách určených přímkou a ve vzdálenosti d od ní.*

Důkaz. Je dána přímka a a kladná vzdálenost d. Celý důkaz budeme řešit pouze v jedné zvolené polorovině s hraniční přímkou a, v opačné polorovině by se vše řešilo analogicky.

Zvolme bod S, pro který platí $|Sa| = d$, a označme S_a jeho pravoúhlý průmět na přímku a (viz obrázek 2.9). Chceme dokázat, že

1. libovolný bod X, pro který platí $|Xa| = d$, leží na přímce p procházející bodem S, která je s přímkou a rovnoběžná,

2. pro každý bod Y, který leží na přímce p, která je rovnoběžná s přímkou a, platí, že $|Ya| = d$.



Obrázek 2.9: Ekvidistanta přímky a

V 1. bodě předpokládáme, že bod X má danou vzdálenost d od přímky a (jeho pravoúhlý průmět na přímku a označíme X_a). Dále předpokládáme, že bod X leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou a jako bod S. Chceme dokázat, že přímka $\overleftrightarrow{SX}$ je rovnoběžná s přímkou a. Trojúhelníky S_aXX_a, XS_aS jsou shodné, neboť stranu XS_a mají společnou, $|\angle XX_aS_a| = |\angle S_aSX| = 90°$ a $|XX_a| = |S_aS| = d$. To znamená, že čtyřúhelník S_aSXX_a je obdélník nebo čtverec (všechny úhly jsou pravé), a proto úsečky SX, S_aX_a, ale i přímky $\overleftrightarrow{SX}, \overleftrightarrow{S_aX_a}$, jsou rovnoběžné.
Označme Y_a pravoúhlý průmět bodu Y na přímku a (úsečka YY_a je kolmá k přímce a). Z předpokladu víme, že $\overleftrightarrow{YS} \parallel \overleftrightarrow{Y_aS_a}$, a proto jsou trojúhelníky YS_aS, S_aYY_a shodné. Mají společnou stranu YS_a, $|\angle YSS_a| = |\angle S_aY_aY| = 90°$ a z vlastnosti shodných úhlů dvou rovnoběžek proťatých příčkou platí, že $|\angle S_aYS| = |\angle YS_aY_a|$. Pak se musí rovnat i délky stran YY_a, SS_a a platí, že $d = |SS_a| = |YY_a|$.
Tím je tedy dokázáno, že přímka p je částí ekvidistanty, která leží ve vzdálenosti d od přímky a. □

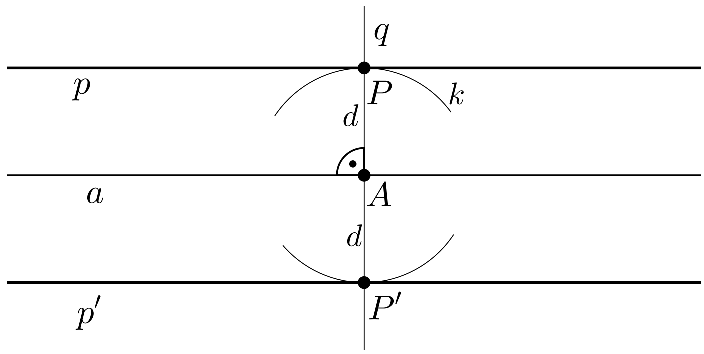
Symbolický zápis ekvidistanty přímky:

$$p \cup p' = \{X \in \rho; |Xa| = d\}.$$

Tyto dvě rovnoběžky p, p' jsou zároveň množinou všech středů kružnic, které se dotýkají přímky a a mají poloměr d.
KONSTRUKCE: (viz obrázek 2.10)

1. Sestrojíme přímku a a na ní bod A.
2. Sestrojíme kolmici q k přímce a v bodě A.
3. Sestrojíme kružnici k se středem v bodě A a poloměrem d.
4. Průsečíky kružnice k a kolmice q označíme P, P'.
5. Sestrojíme rovnoběžky p, p' s přímkou a procházející body P, P'.

Přímky p, p' jsou pak ekvidistantami přímky a.



Obrázek 2.10: Konstrukce ekvidistanty přímky

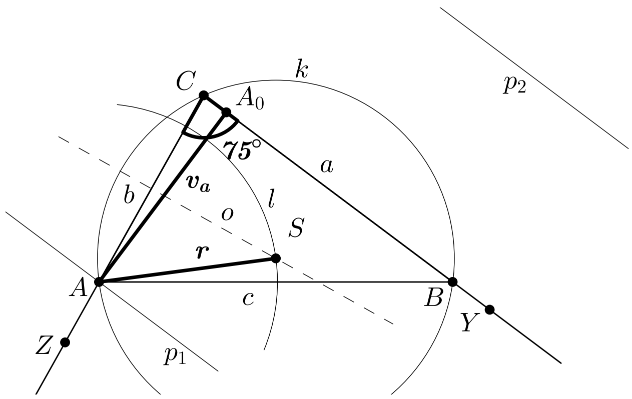
Úloha 3. Sestrojte trojúhelník ABC, pro který platí $\gamma = 75°, v_a = 3,5\,cm, r = 2,5\,cm$, kde r je poloměr kružnice opsané.

Na této nepolohové úloze budeme demonstrovat, jak se liší postupy řešení úlohy v závislosti na výběru umístění jednoho zadaného prvku do roviny. Celkový počet řešení úlohy se však nezmění. Navíc na úloze ukážeme důležitost provádění zkoušky.

Řešení A: Zvolíme umístění úhlu $\angle ZCY$ ($|\angle ZCY| = \gamma$) do roviny.
Rozbor: (viz obrázek 2.11)
Vrchol A leží na polopřímce $\overrightarrow{CZ}$ a zároveň na rovnoběžce s polopřímkou $\overrightarrow{CY}$. Jejich

vzdálenost je rovna velikosti v_a. Pro určení vrcholu B musíme nejprve sestrojit kružnici trojúhelníku ABC opsanou. Její střed S leží na ose o úsečky AC a na kružnici $l(A, r)$. Zbývající vrchol B je pak průsečíkem kružnice opsané s polopřímkou $\overrightarrow{CY}$ $(B \neq C)$. Symbolicky:

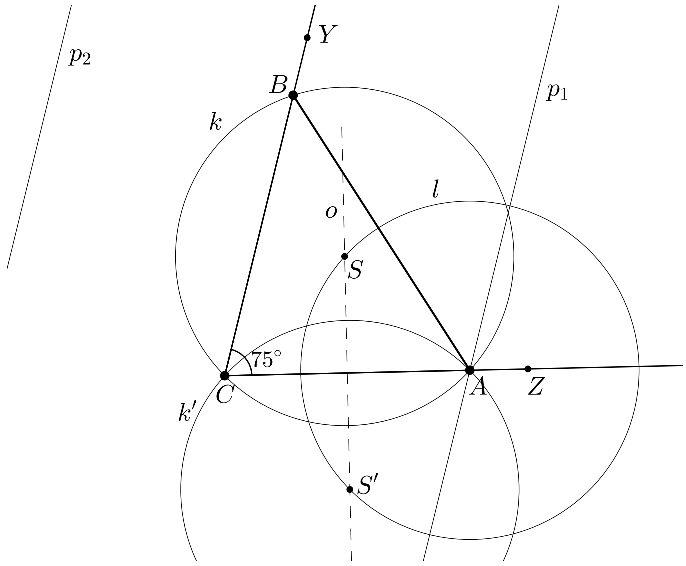
1) Zvolíme úhel $\angle ZCY$, kde $|\angle ZCY| = \gamma$.
2) Vrchol $A \in \overrightarrow{CZ} \wedge A \in M; M = \{X \in \rho : |X\overleftrightarrow{CY}| = v_a\} = p_1 \cup p_2$.
3) Střed kružnice opsané $S \in o;\ o = \{X \in \rho : |AX| = |CX|\} \wedge S \in l;\ l(A, r)$.
4) Zbývající vrchol $B \in \overrightarrow{CY} \wedge B \in k;\ k(S, r)$.



Obrázek 2.11: Náčrt k úloze 3 (řešení A)

Popis konstrukce:

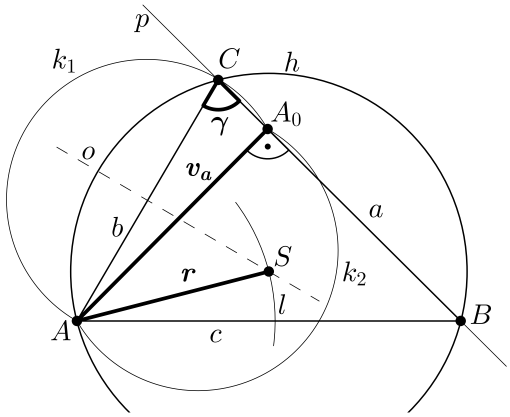
1. $\angle ZCY; |\angle ZCY| = 75°$
2. $p;\ p = \{X \in \rho : |X\overleftrightarrow{CY}| = 3,5\ cm\}$
3. $A; A \in \overrightarrow{CZ} \cap p$
4. $o;\ o = \{X \in \rho : |XA| = |XC|\}$
5. $l;\ l(A, 2,5\ cm)$
6. $S; S \in o \cap l$
7. $k;\ k(S, 2,5\ cm)$
8. $B; B \in\ k\ \cap\ \overrightarrow{CY}$
9. $\triangle ABC$



Obrázek 2.12: Konstrukce úlohy 3 (řešení A)

Zkouška: Úhel $\angle ZCY$ a přímky p_1, p_2 jsou dány jednoznačně. Průsečík A lze sestrojit právě jeden, neboť polopřímka $\overrightarrow{CZ}$ má svůj počátek v pásu mezi rovnoběžkami p_1, p_2, a proto protne pouze jednu z nich. Naopak průsečíky osy úsečky o s kružnicí l sestrojíme právě dva, a tedy vzniknou i dvě kružnice trojúhelníku opsané k, k'. Pro vrchol B však platí, že musí ležet na polopřímce $\overrightarrow{CY}$. A tu jedna z kružnic opsaných k protíná pouze v bodě C, tedy v tomto případě nelze sestrojit bod $B \neq C$.
Diskuse a počet řešení: Protože sestrojíme pouze jeden vrchol B, má úloha při daných hodnotách zadaných prvků právě 1 řešení (viz obrázek 2.12).

Řešení B: Zvolíme umístění úsečky AA_0 do roviny.
Rozbor: (viz obrázek 2.13)
Nejprve sestrojíme trojúhelník AA_0C a to tak, že k úsečce AA_0 v bodě A_0 zkonstruujeme kolmici p a kružnicové oblouky k_1, k_2, pro které platí, že $k_1 \cup k_2 = \{X \in \rho : |\angle AXA_0| = \gamma\}$. Bod C je pak průsečíkem kružnicových oblouků s kolmicí p. (Tyto průsečíky vzniknou dva.) Dále postupujeme jako u *řešení A*, kdy střed kružnice opsané je průsečíkem kružnice se středem v bodě A a poloměrem $r = 2,5\ cm$ a osy o úsečky AC. Po sestrojení kružnic trojúhelníku opsaných, je vrchol B průsečíkem této kružnice a přímky p.



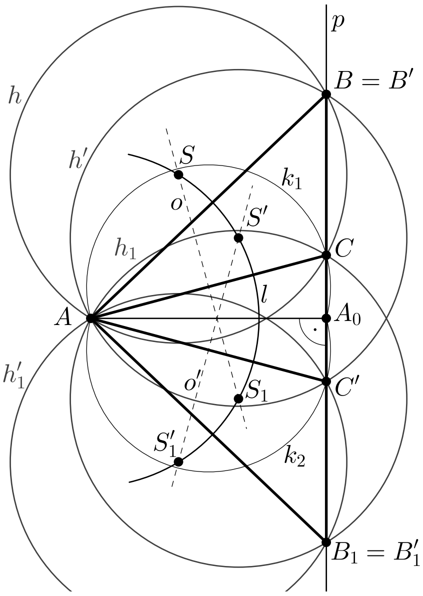
Obrázek 2.13: Náčrt k úloze 3 (řešení B)

Popis konstrukce:

1. $AA_0;\ |AA_0| = 3,5\ cm$
2. $p;\ p \perp AA_0 \wedge A_0 \in\ p$
3. $k;\ k = \{X \in \rho : |\angle AXA_0| = 75°\}$
4. $C;\ C \in\ p \cap\ k$
5. $o;\ o = \{X \in \rho : |XA| = |XC|\}$
6. $l;\ l(A, 2,5\ cm)$
7. $S; S \in o \cap l$
8. $h;\ h(S, 2,5\ cm)$
9. $B; B \in\ k\ \cap\ p\ \ \wedge B \neq C$
10. $\triangle ABC$

Zkouška: Rýsováním podle postupu konstrukce sestrojíme 4 trojúhelníky $ABC, AB'C'$, AB_1C a $AB_1'C'$, avšak pouze dva z nich odpovídají podmínkám daným zadáním této úlohy. Trojúhelníky $ABC, AB_1'C'$ nesplňují podmínku $\gamma = 75°$, tedy je nelze počítat do řešení této úlohy.
Diskuse a počet řešení: Protože je úloha nepolohová, bude mít 1 řešení, i když rýsováním vzniknou 2 shodné trojúhelníky $AB'C', AB_1C$ (viz obrázek 2.14).

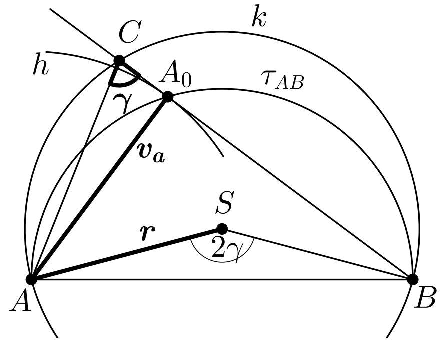
Řešení C: Zvolíme umístění kružnice $k(S, r)$ opsané trojúhelníku ABC do roviny.
Rozbor: (viz obrázek 2.15)



Obrázek 2.14: Kostrukce úlohy 3 (řešení B)

Body A, B zvolíme na kružnici k tak, aby platilo, že $|\angle ASB| = 2\gamma$ (využijeme věty o obvodovém a středovém úhlu – viz věta 7). Bod A_0 leží na kružnici $h(A, v_a)$ a zároveň na Thaletově kružnici nad úsečkou AB. Zbývající vrchol C je průsečíkem polopřímky $\overrightarrow{BA_0}$ s kružnicí k. Symbolicky:

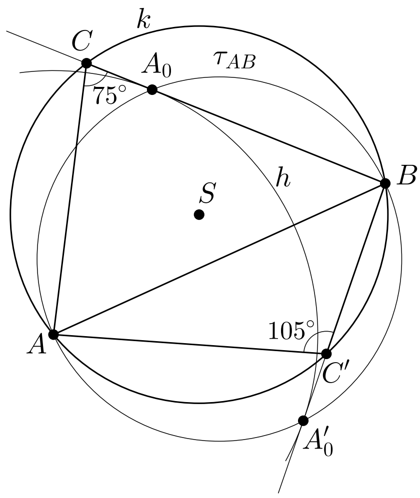
1) Sestrojíme kružnici $k(S, r)$.
2) Vrchol A zvolíme libovolně na kružnici k.
3) Vrchol $B \in k \ \wedge |\angle ASB| = 2\gamma$.
4) Bod $A_0 \in h(A, v_a) \ \wedge A_0 \in \tau_{AB}$.
5) Vrchol $C \in k \ \cap \ \overrightarrow{BA_0}$.



Obrázek 2.15: Náčrt k úloze 3 (řešení C)

Popis konstrukce:

1. k; $k(S, 2, 5\ cm)$
2. A; $A \in k$
3. B; $B \in k\ \wedge\ |\angle ASB| = 150°$
4. h; $h(A, 3, 5\ cm)$
5. τ_{AB}
6. A_0; $A_0 \in h\ \cap\ \tau_{AB}$
7. C; $C \in k\ \cap\ \overrightarrow{BA_0}$
8. $\triangle ABC$



Obrázek 2.16: Konstrukce úlohy 3 (řešení C)

Zkouška: Podle obrázku 2.16 sestrojíme 2 řešení, ale trojúhelník ABC' nesplňuje zadané podmínky, neboť úhel $\gamma \neq 75°$. Je tedy nutné ho z počtu řešení této úlohy vyřadit.

Poznámka: Určením polohy kružnice k (1. bod konstrukce) lze sestrojit nekonečně mnoho řešení. Až volba bodu A na kružnici omezí počet řešení na konečný počet.

Počet řešení: Protože je úloha nepolohová, má pouze 1 řešení, i když lze sestrojit dva různé vrcholy B (podle 3. bodu v popisu konstrukce). To platí obecně, neboť tečny z bodu B ke kružnici h vedou opačnými polorovinami ohraničenými přímkou $\overleftrightarrow{AB}$ (bod A je totiž vnitřním bodem kružnice h a bod B vnějším). Sestrojené trojúhelníky ABC a AB_1C_1 jsou shodné.

2.2.4 Osa pásu

Definice 18. [19, str. 94] Množina všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od dvou daných rovnoběžek a, b ($a \neq b$), je *osa o pásu* (a, b).

Osu pásu lze symbolicky zapsat

$$o = \{X \in \rho : |Xa| = |Xb|\}.$$

Jedná se též o množinu středů všech kružnic, které se dotýkají daných rovnoběžek.

Tvrzení 3. *Osa pásu o je přímka, která je rovnoběžná s danými přímkami a, b. Navíc osa pásu dělí vzdálenost přímek a, b na poloviny.*

Důkaz. Zvolme bod S, pro který platí, že $|Sa| = |Sb|$, a označme jeho pravoúhlé průměty na přímky a, b po řadě S_a, S_b (viz obrázek 2.17). Přímka $\overleftrightarrow{S_aS_b}$ je kolmá k přímkám a, b. Chceme dokázat, že

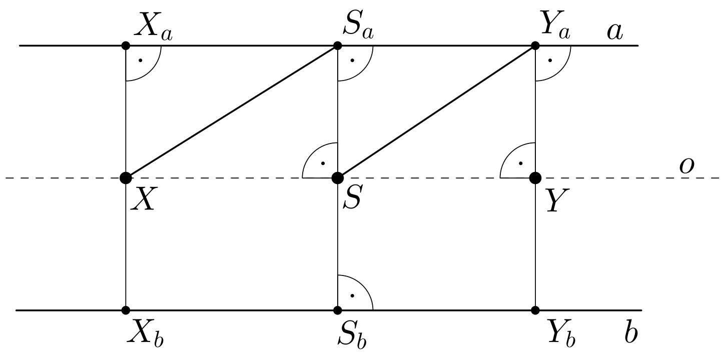
1. libovolný bod X, pro který platí $|Xa| = |Xb|$, leží na přímce o procházející bodem S a rovnoběžné s přímkami a, b,

2. pro každý bod Y, který leží na přímce $o, (S \in o)$, která je zároveň rovnoběžná s přímkami a, b, platí, že $|Ya| = |Yb|$.

V 1. bodě předpokládáme, že bod $X \neq S$ je stejně vzdálen od obou přímek a, b (označme příslušné pravoúhlé průměty X_a, X_b). Přímka $\overleftrightarrow{X_aX_b}$ je kolmá k přímkám a, b, protože přímky a, b jsou rovnoběžné. Čtyřúhelník SXX_aS_a je obdélník nebo čtverec (má všechny vnitřní úhly pravé). Z toho vyplývá, že $|X_aX_b| = |S_aS_b|$ a body X a S jsou středy těchto úseček. Vzniklé trojúhelníky X_aXS, SS_aX_a jsou tedy shodné, neboť mají společnou stranu XS_a, $|S_aS| = |XX_a|$ a $|\angle SXX_a| = |\angle X_aS_aS| = 90°$ (to vyplývá z kolmosti XX_a a SS_a k přímce a). Analogicky dokážeme rovnoběžnost přímky o s přímkou b.

Ve 2. bodě značme pravoúhlé průměty bodu $Y \neq S$ (ležícího na přímce o) na přímky a, b po řadě Y_a, Y_b. Ve čtyřúhelníku SYY_aS_a jsou úsečky SY a S_aY_a rovnoběžné. Pokud tento čtyřúhelník protneme přímkou $\overleftrightarrow{SY_a}$, dostaneme dva shodné trojúhelníky SYY_a,

Y_aS_aS podle věty *usu* (úsečku SY_a mají společnou, $|\angle SY_aS_a| = |\angle Y_aSY|$ z předpokladu rovnoběžnosti přímek $\overleftrightarrow{SY}$, $\overleftrightarrow{S_aY_a}$ a $|\angle SS_aY_a| = |\angle Y_aYS| = 90°$ s využitím znalosti o kolmosti pravoúhlých průmětů). Tedy platí, že $|SS_a| = |YY_a|$. Po provedení analogického postupu ve čtyřúhelníku SYY_bS_b získáme rovnost $|SS_b| = |YY_b|$. Spojením této informace s předpokladem $|SS_a| = |SS_b|$ platí, že $|YY_a| = |YY_b|$. Libovolný bod Y, který leží na přímce o, je tedy stejně vzdálen od obou rovnoběžných přímek a, b a tedy přímka o je s těmito přímkami rovnoběžná. □



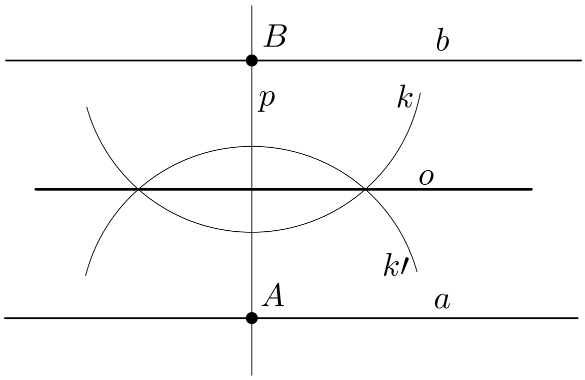
Obrázek 2.17: Osa pásu dvou rovnoběžek

KONSTRUKCE: (viz obrázek 2.18)

1. Je dána dvojice rovnoběžných přímek a, b.
2. Sestrojíme libovolnou kolmici p k přímkám a, b a její průsečíky s přímkami označíme po řadě A, B.
3. Sestrojíme kružnici k se středem v bodě A a libovolným poloměrem větším než polovina úsečky AB.
4. Sestrojíme kružnici k' se středem v bodě B a stejným poloměrem jako u kružnice k.
5. Sestrojíme přímku o, která prochází průsečíky kružnic k, k'.

Přímka o jsou pak osou pásu a, b.

V konstrukčních úlohách v trojúhelníku se osa pásu téměř nevyužívá, proto jsme zvolili úlohu na konstrukci kružnice. Protože při řešení této úlohy využijeme množinu bodů, o které jsme se doposud nezmínili, uvedeme její definici před řešením úlohy.



Obrázek 2.18: Konstrukce osy pásu dvou rovnoběžek

Definice 19. [10] Množina středů všech kružnic, které se dotýkají dané kružnice k (se středem S a poloměrem $r > 0$) a mají daný poloměr $d > 0$, se nazývá *ekvidistanta kružnice k.*

Tvrzení 4. *[19, str. 96] Ekvidistanta kružnice $k(S, r)$, kde $r \neq d$, je dvojice kružnic l, l' soustředných s kružnicí k o poloměrech $r + d$ a $|r - d|$.*

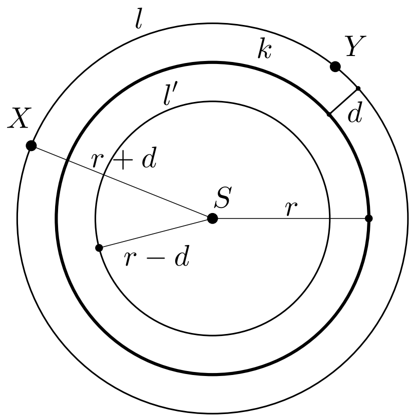
Důkaz. Je dána kružnice k se středem S a nenulovým poloměrem r a kladná vzdálenost d (viz obrázek 2.19). Důkaz provedeme pouze pro kružnici l s poloměrem $r + d$ (pro kružnici l' s poloměrem $|r - d|$ by se důkaz provedl analogicky). Předpokládáme tedy, že kružnice l leží vně kružnice k. Chceme dokázat, že

1. libovolný bod X, pro který platí, že $|XS| = r + d$, leží na kružnici l, která je s kružnicí k soustředná,

2. pro libovolný bod Y, který leží na kružnici l soustředné s kružnicí k, kde vzdálenost kružnice je rovna d, platí $|YS| = r + d$.

V obou případech využijeme definici kružnice (13). V první implikaci víme, že množina všech bodů X, které mají od pevného bodu S stejnou vzdálenost $(r + d)$, leží na kružnici. Označme ji l. Ta je však s kružnicí k soustředná, neboť mají stejný střed S a odlišný poloměr.

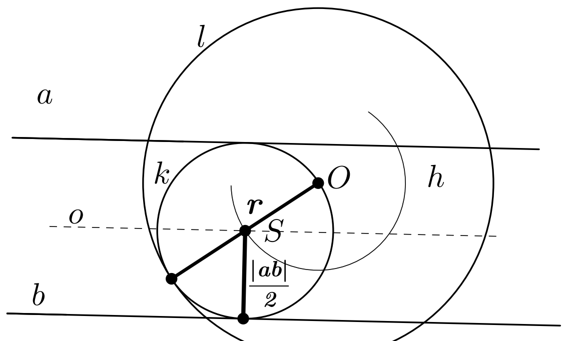
V obrácené implikaci z předpokladu, že bod $Y \in l$, která je soustředná s kružnicí k, platí, že obě kružnice mají stejný střed S. Protože jejich vzdálenost je rovna d, pak poloměr kružnice l je roven $r + d$, a tedy pro bod Y platí, že $|YS| = r + d$. $\square$



Obrázek 2.19: Ekvidistanta kružnice

Úloha 4. Jsou dány dvě různé rovnoběžné přímky a, b a kružnice $k(O, r)$, která obě rovnoběžky protíná. Sestrojte kružnici, která se dotýká přímek a, b a s kružnicí k má vnitřní dotyk.

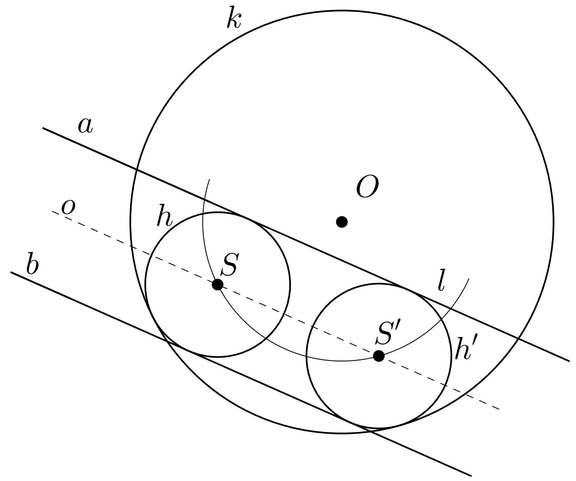
Řešení: Úloha je zadána obecně, ale je dáno umístění zadaných prvků v rovině.
Rozbor: (viz obrázek 2.20)
Střed S hledané kružnice h leží na ose pásu přímek a, b, a zároveň na části ekvidistanty h kružnice l, která má poloměr $r - \frac{1}{2}|ab|$.



Obrázek 2.20: Náčrt k úloze 4

Popis konstrukce:

1. $a, b; a \parallel b$
2. $O, k;\ k(O, r)$, kde $r > \frac{1}{2}|ab|$
3. $o;\ o = \{X \in \rho : |Xa| = |Xb|\}$
4. $l; l(O, r - \frac{1}{2}|ab|)$
5. $S; S \in l \cap o$
6. $h; h(S, \frac{1}{2}|ab|)$



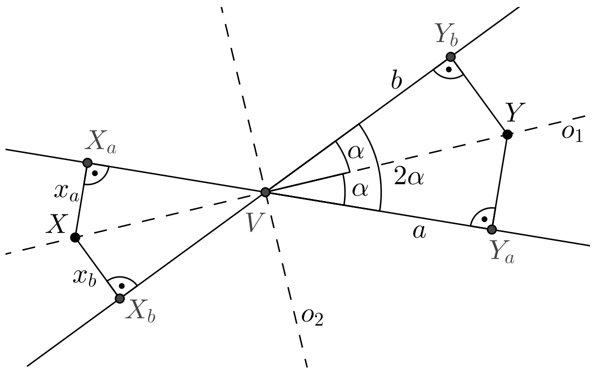
Obrázek 2.21: Konstrukce úlohy 4

Počet řešení a diskuse: Ze zadání víme, že kružnice k protíná obě přímky. Z toho vyplývá, že $r > \frac{1}{2}|ab|$ a zároveň alespoň jedna ze vzdáleností $|Oa|$, nebo $|Ob|$ je větší nebo rovna než $\frac{1}{2}|ab|$.
Zvolme tedy situaci $r > |Ob| > \frac{1}{2}|ab|$. Pak $|Oo| = |Ob| - \frac{1}{2}|ab| < r - \frac{1}{2}|ab|$, a tedy $h(O, r - \frac{1}{2}|ab|)$ protne osu o ve dvou bodech. Střed O a kružnice h tedy vždy existují a úloha má vždy 2 řešení (viz obrázek 2.21). Situace, kdy $r > |Oa|$, by se dokázala analogicky.

2.2.5 Osa úhlu

Nejprve zadefinujeme pojem osa dvou různoběžných přímek, protože tento pojem je obecnější a při řešení konstrukčních úloh nedojde k opomenutí nějakého řešení, a až poté zadefinujeme osu daného úhlu.

Definice 20. [25, str. 160] Nechť jsou a, b různoběžné přímky. Nechť x_a je vzdálenost bodu X od přímky a, x_b vzdálenost bodu X od přímky b. Množina všech bodů X takových, že $x_a = x_b$, se nazývá *osa různoběžných přímek* a, b (viz obrázek 2.22).



Obrázek 2.22: Osy dvou různoběžných přímek

Tvrzení 5. *Osou různoběžných přímek a, b je dvojice přímek o_1, o_2, které půlí čtyři úhly určené přímkami a, b.*

Důkaz. Označme V průsečík přímek a, b. Chceme dokázat, že

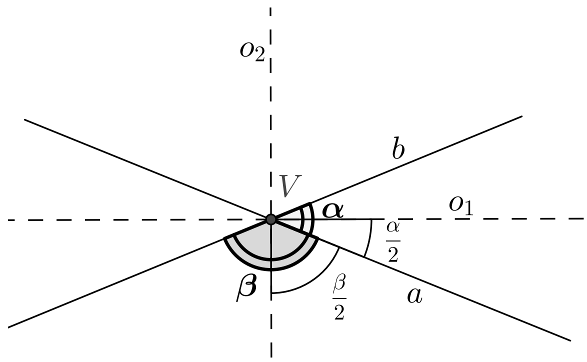
1. libovolný bod $X \neq V$, pro který platí, že $x_a = x_b$, leží na jedné z přímek o_1, o_2,
2. pro každý bod $Y \neq V$, který leží na přímce o_a(nebo o_b), platí $y_a = y_b$.

Trojúhelníky VXX_a a VXX_b, kde X_a, X_b jsou příslušné kolmé průměty bodu X k přímkám a, b, jsou shodné podle věty *(Ssu)*, úsečku VX, která je přeponou obou trojúhelníků, mají společnou, z předpokladu víme, že $x_a = x_b$, a $|\angle VX_aX| = |\angle VX_bX|$ (viz obrázek 2.22). Tedy platí i rovnost úhlů $\angle XVX_a$ a $\angle XVX_b$. Bod X proto leží na přímce, která půlí příslušný úhel.

Nechť Y je libovolným bodem přímky o_1, což je přímka půlící úhel přímek a, b, a Y_a, Y_b jsou příslušné kolmé průměty bodu Y k přímkám a, b. Sestrojené trojúhelníky VYY_a, VYY_b jsou shodné, protože $|\angle YVY_a| = |\angle YVY_b|$, $|\angle VY_aY| = |\angle VY_bY|$ a stranu VY mají společnou. Ze shodnosti vyplývá, že i $y_a = y_b$. Totéž lze analogicky dokázat i pro libovolný bod osy o_2. $\square$

Tvrzení 6. *Osy různoběžných přímek a, b jsou na sebe kolmé ($o_1 \perp o_2$).*

Důkaz. Označme α, β různé úhly, které svírají různoběžné přímky a, b. Pak platí, že $\alpha + \beta = 180°$ (viz obrázek 2.23). Úhel, který svírají osy o_1, o_2 je roven $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$ (viz tvrzení 5). Z úpravy rovnosti je zřejmé, že $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90°$. □



Obrázek 2.23: Kolmost os různoběžných přímek

Symbolický zápis os různoběžných přímek a, b:

$$o_1 \cup o_2 = \{X \in \rho : |Xa| = |Xb|\}.$$

Přímky o_1, o_2 jsou také množinou středů všech kružnic, které se dotýkají obou různoběžných přímek, s výjimkou jejich průsečíku (viz [18, str. 409]).

Protože jsou objektem našeho zájmu vnitřní úhly trojúhelníku, budeme pracovat s pojmem úhel jako se systémem dvou polopřímek se společným počátkem (viz definice 1). Pak osu tohoto úhlu definujeme následovně.

Definice 21. [3] Množina všech bodů daného úhlu $\angle BAC$ trojúhelníku ABC, které mají stejnou vzdálenost od obou polopřímek $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$, se nazývá *osa úhlu* $\angle BAC$.

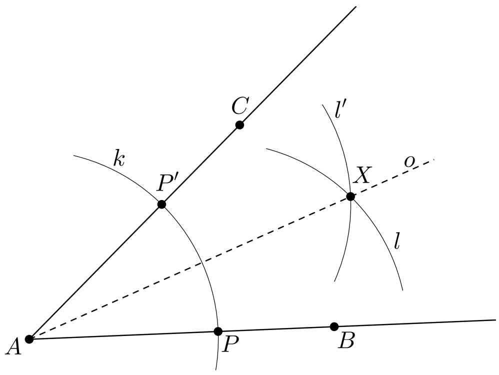
V trojúhelníku ABC budeme osy vnitřních úhlů označovat po řadě $o_\alpha, o_\beta, o_\gamma$. Symbolicky lze osu vnitřního úhlu zapsat

$$o_\alpha = \{X \in \angle CAB : |X\overrightarrow{AC}| = |X\overrightarrow{AB}|\}.$$

Tato osa je totožná, kromě vrcholu úhlu, s množinou všech středů kružnic, které se dotýkají obou ramen daného úhlu.

Poznámka: Ve středoškolských učebnicích je většinou osa úhlu definována v konvexním úhlu jako polopřímka s vrcholem ve vrcholu daného úhlu, která má stejnou vzdálenost od obou ramen úhlu.

V konkrétních konstrukčních úlohách je pak zapotřebí dobře uvážit, zda lze použít pouze osu daného úhlu, nebo musíme pracovat s osu dvou různoběžných přímek.



Obrázek 2.24: Konstrukce osy úhlu CAB

KONSTRUKCE: (viz obrázek 2.24)

1. Sestrojíme úhel $\angle CAB$.
2. Sestrojíme kružnici k se středem v bodě A a libovolným poloměrem r.
3. Průsečíky kružnice k s rameny úhlu $\angle CAB$ označíme P, P'.
4. Sestrojíme kružnice l, l' se středy po řadě P, P' a stejným poloměrem jako kružnice k, tedy o velikosti r.
5. Označme průsečík kružnic l, l' X.
6. Polopřímka $\overrightarrow{AX}$ (bez bodu A) je hledanou osou úhlu $\angle CAB$.

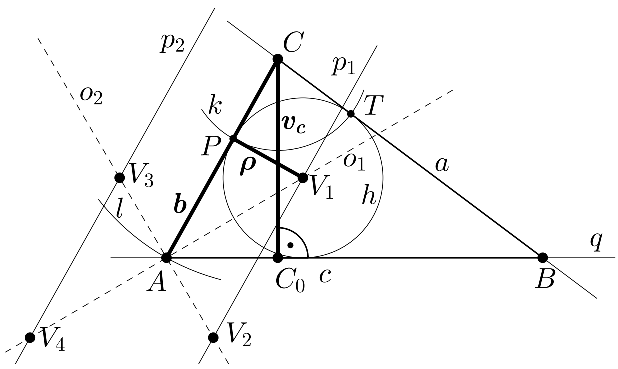
Úloha 5. [19, str. 106] Sestroj trojúhelník ABC, pro který platí $v_c = 3\ cm, b = 4\ cm$ a poloměr kružnice vepsané $\rho = 1\ cm$.

Řešení: Úloha je zadána prvky s konkrétními metrickými hodnotami. Při určení počtu řešení musíme zohlednit, že úloha je nepolohová.

Rozbor: (viz obrázek 2.25)

Zvolíme umístění výšky $v_c = |CC_0|$ do roviny. Vrcholy A, B budou ležet na přímce q, která je kolmá k úsečce CC_0 a prochází bodem C_0. Vrchol A zároveň leží na kružnici $l(C, b)$. Dále sestrojíme kružnici trojúhelníku ABC vepsanou. Střed této kružnice leží na ose různoběžek $\overleftrightarrow{AC_0}$ a $\overleftrightarrow{AC}$ a také na ekvidistantě p, která je od $\overleftrightarrow{AC}$ vzdálena o velikost ρ. Bod T je bod dotyku kružnice h se stranou a. Sestrojíme ho pomocí kružnice $k(C, |CP|)$, kde P je bod dotyku kružnice h s přímkou $\overleftrightarrow{AC}$. Zbývající vrchol B je průsečíkem přímek q a $\overleftrightarrow{CT}$. Symbolicky:

1) Je dána výška $v_c = |CC_0|$.
2) Vrchol $A \in q$; $q \perp CC_0 \ \wedge \ C_0 \in q$, a zároveň $A \in l$; $l(C, b)$.
3) Střed kružnice $V \in p$; $p = \{X \in \rho : |Xb| = \rho\} \quad \wedge \quad V \in o$; $o = \{X \in \rho : |X\overleftrightarrow{AC_0}| = |X\overleftrightarrow{AC}|\}$.
4) Sestrojíme kružnici vepsanou $h(V, \rho)$ a bod $P \in h \cap \overleftrightarrow{AC}$.
5) Bod $T \in k(C, |CP|) \wedge T \in h$.
6) Vrchol $B \in q \cap \overleftrightarrow{CT}$.

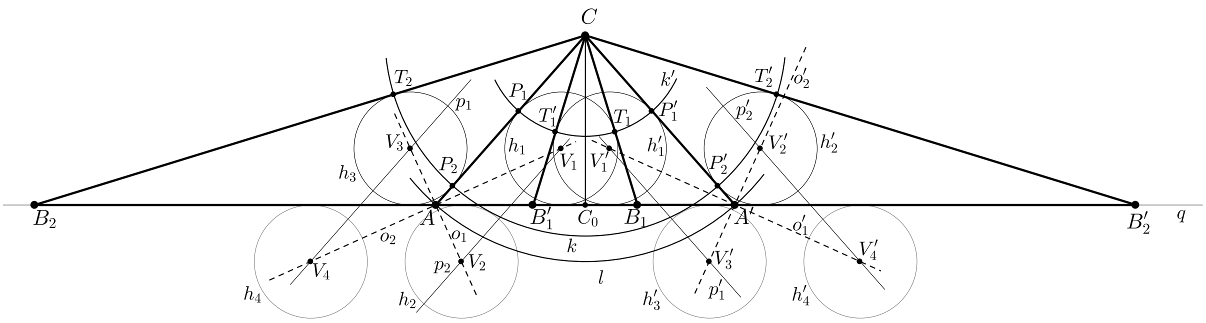


Obrázek 2.25: Náčrt k úloze 5

Popis konstrukce:

1. CC_0; $|CC_0| = 3\ cm$
2. q; $q \perp CC_0 \ \wedge \ C_0 \in q$
3. l; $l(C, 4\ cm)$
4. A; $A \in q \cap l$
5. o; $o = \{X \in \rho : |X\overleftrightarrow{AC_0}| = |X\overleftrightarrow{AC}|\}$

6. $p;\ p = \{X \in \rho : |X\overleftrightarrow{AC}| = 1\ cm\}$
7. $V;\ V \in o \cap p$
8. $h;\ h(V, 1\ cm)$
9. $P; P \in\ h\ \cap\ \overleftrightarrow{AC}$
10. $k;\ k(C, |CP|)$
11. $T;\ T \in\ k \cap h\ \wedge\ T \notin \overleftrightarrow{AC}$
12. $B; B \in\ \overleftrightarrow{AC_0}\ \cap \overleftrightarrow{CT}$
13. $\triangle ABC$



Obrázek 2.26: Konstrukce úlohy 5

Zkouška: Všechny body konstrukce vyhovují zadaným podmínkám, konstrukce je tedy správná.

Počet řešení: Jelikož se jedná o nepolohovou úlohu, má 2 řešení, i když konstrukcí sestrojíme dvě dvojice (shodných) trojúhelníků AB_1C, $A'B_1'C$ a AB_2C, $A'B_2'C$ (viz obrázek 2.26). Čárkované vrcholy vzniknou při konstrukci bodu 4 v popisu konstrukce, neboť přímka q a kružnice l mají dva různé průsečíky A, A'. Body označené dolními číselnými indexy značí čtyři různé průsečíky V_1, V_2, V_3, V_4 osy úhlu o a ekvidistanty přímky AC p_1, p_2 (viz bod 7 v popisu konstrukce) a dále všechny útvary na ně navázané.

2.2.6 Množina bodů, ze kterých je úsečka vidět pod daným úhlem

Definice 22. [18, str. 409] Množinu všech bodů v rovině, které jsou vrcholy úhlů shodných s daným úhlem α ($0° < \alpha < 180°$), a jejichž ramena procházejí dvěma danými body A, B ($A \neq B$), čili množinu všech bodů X, z nichž vidíme úsečku AB pod úhlem α, nazýváme *ekvigonála úsečky* AB.

Symbolicky lze tuto množinu zapsat

$$M = \{X \in \rho : |\angle AXB| = \alpha\}.$$

Tvrzení 7. *[18, str. 409] Ekvigonálou úsečky AB jsou dva shodné kružnicové oblouky AX_1B, AX_2B s výjimkou bodů A, B.*

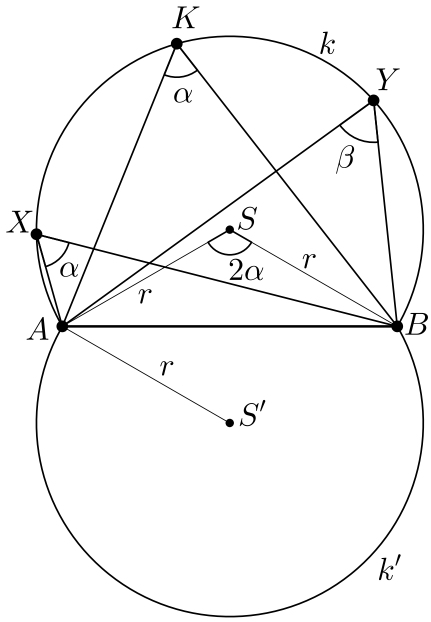
Důkaz. Je dána úsečka AB nenulové délky a kružnicové oblouky $k(S, r)$ a $k'(S', r)$ s krajními body A, B. Zvolme bod K, který leží na kružnicovém oblouku k, pro který platí, že $|\angle AKB| = \alpha$ (při volbě bodu K na kružnicovém oblouku k' bychom postupovali analogicky). Dále předpokládejme, že α je ostrý úhel (důkaz lze udělat analogicky pro tupý úhel, pro pravý úhel platí tvrzení 8). Chceme dokázat, že

1. libovolný bod X různý od bodů A, B, pro který platí $|\angle AXB| = \alpha$, leží na sjednocení kružnicových oblouků k, k',
2. pro každý bod Y, který leží na sjednocení kružnicových oblouků k, k', platí $|\angle AYB| = \alpha$.

Celý důkaz provedeme pouze pro kružnicový oblouk $k(S, r)$, neboť kružnicový oblouk k' je s ním souměrný podle přímky $\overleftrightarrow{AB}$ a všechny kroky důkazu lze pro něj tedy provést analogicky.

Pro dokázání prvního kroku využijeme větu o obvodovém a středovém úhlu (viz věta 7). Na našem případě to znamená, že $|\angle ASB| = 2 \cdot |\angle AKB|$ v oblouku $k(S, r)$. Platí tedy, že $|\angle ASB| = 2\alpha$. Z předpokladu víme, že $|\angle AXB| = \alpha$, a protože velikost úhlu $|\angle ASB| = 2\alpha$, tak úhel $\angle AXB$ je obvodovým úhlem příslušným k oblouku se středovým úhlem $\angle ASB$, který leží na oblouku $k(S, r)$. Tím je dokázáno, že bod X leží na kružnicovém oblouku k.

Z předpokladu druhého kroku víme, že Y leží na kružnicovém oblouku k (viz obrázek 2.27). Označme $|\angle AYB| = \beta$. Chceme ukázat, že $\beta = \alpha$. Pro poloměr r kružnicového oblouku k z trojúhelníku AKB platí, že $r = \frac{|AB|}{2 \cdot \sin\alpha}$. Z trojúhelníku AYB pro délku



Obrázek 2.27: Ilustrace k důkazu tvrzení 7

poloměru platí $r = \frac{|AB|}{2 \cdot \sin \beta}$. Z těchto rovností po úpravě dostaneme:

$$\begin{aligned} \frac{|AB|}{2 \cdot \sin \alpha} &= \frac{|AB|}{2 \cdot \sin \beta} \\ \frac{1}{\sin \alpha} &= \frac{1}{\sin \beta} \\ \sin \beta &= \sin \alpha \\ \alpha &= \beta \end{aligned}$$

Poslední rovnost platí, protože oba úhly jsou ostré, tudíž se rovnají i jejich siny. Tím jsme dokázali, že $|\angle AYB| = \alpha$. □

Tyto oblouky jsou souměrně sdružené podle přímky AB (viz [18, str. 409].

Pro konstrukci ekvigonály úsečky AB využijeme znalosti, že obvodový úhel příslušný k oblouku AB je roven úsekovému úhlu, jehož jedním ramenem je polopřímka $\overrightarrow{AB}$ a druhým část tečny t k oblouku v bodě A.

KONSTRUKCE: (viz obrázek 2.28)

1. Je dána úsečka AB, určíme její střed.

2. Sestrojíme osu o úsečky AB.

3. $\overrightarrow{AZ}$ je částí tečny t a platí pro ni, že $|\angle BAZ| = \alpha$.

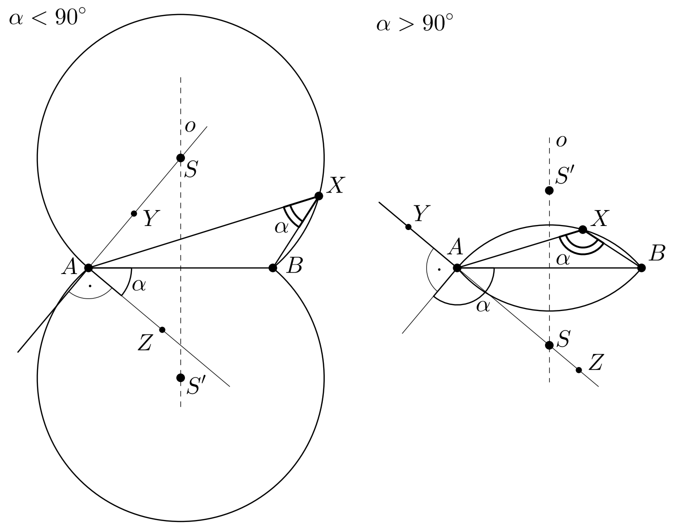
4. Sestrojíme kolmice $\overleftrightarrow{AY}$ k tečně t, $(\overleftrightarrow{AY} \perp t)$.

5. Střed hledaného kružnicového oblouku $S \in o \cap \overleftrightarrow{AY}$.

6. Kružnice $k(S, |SA|)$.

Střed druhého kružnicového oblouku je osově souměrný s bodem S podle přímky $\overleftrightarrow{AB}$.

Úsečka AB rozdělí kružnici k na dva kružnicové oblouky. Pokud $|AB| \neq 2|SA|$, tedy průměru kružnice k, platí, že větší kružnicový oblouk přísluší úhlu $\alpha < 90°$ a menší kružnicový oblouk přísluší úhlu $\alpha > 90°$.



Obrázek 2.28: Konstrukce ekvigonály úsečky AB

Úloha 6. Sestrojte trojúhelník, znáte-li velikost strany c, těžnice t_c a úhlu γ.

Řešení: Úloha je nepolohová, prvky jsou zadány parametricky, zvolíme umístění úsečky AB do roviny.

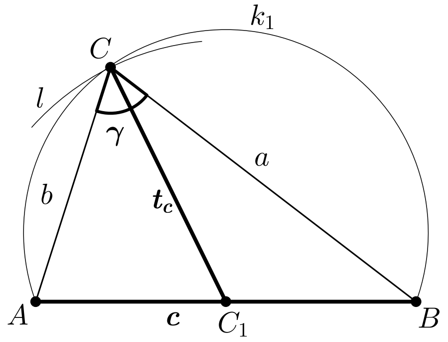
Rozbor: (viz obrázek 2.29)

Umístíme úsečku AB o velikosti c do roviny a sestrojíme její střed C_1. Zbývající vrchol C leží na ekvigonále úsečky AB o velikosti úhlu γ a na kružnici l se středem v bodě C_1 a poloměru t_c. Symbolicky:

1) Je dána úsečka AB.

2) C_1 je střed úsečky AB.

3) Vrchol $C \in M$; $M = \{X \in \rho : |\angle AXB| = \gamma\} = k_1 \cup k_2 \quad \wedge \; C \in l$; $l(C_1, t_c)$.



Obrázek 2.29: Náčrt k úloze 6

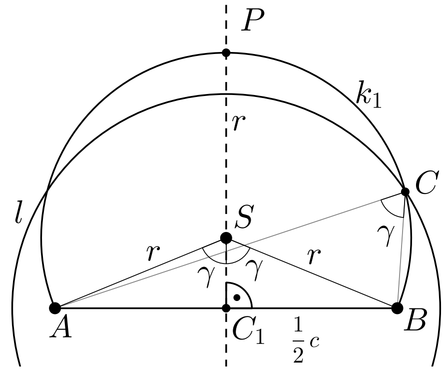
Popis konstrukce:

1. AB; $|AB| = c$
2. C_1; C_1 je střed úsečky AB
3. k; $k = \{X \in \rho : |\angle AXB| = \gamma\}$
4. l; $l(C_1, t_c)$
5. $C; C \in \; l \cap k$
6. $\triangle ABC$

Diskuse řešitelnosti: Existence trojúhelníku ABC závisí na počtu průniků kružnice l (C_1, v_c) a kružnicových oblouků $k_1 \cup k_2$. Nechť P je průsečík osy úsečky AB a kružnicového oblouku k_1 (viz obrázek 2.30). Jestliže $|C_1P| < t_c$, vrchol C nesestrojíme a trojúhelník ABC nevznikne.

Pro určení počtu řešení označme střed kružnicového oblouku k_1 S a poloměr r. Střed S leží na ose úsečky AB (viz konstrukce ekvigonály úsečky), trojúhelník BSC_1 je tedy pravoúhlý a platí $|BS| = \frac{c}{2\sin\gamma} = r$.

Vzdálenost $|C_1P| = |C_1S| + |SP|$, tedy je rovna součtu poloměru r kružnicového oblouku k_1 a vzdálenosti SC_1, která je z pravoúhlého trojúhelníku BSC_1 rovna $\frac{c \cdot \cot\gamma}{2}$. Po úpravě součtu dostáváme výraz $\frac{c}{2} \cdot \frac{\cos\gamma + 1}{\sin\gamma}$.



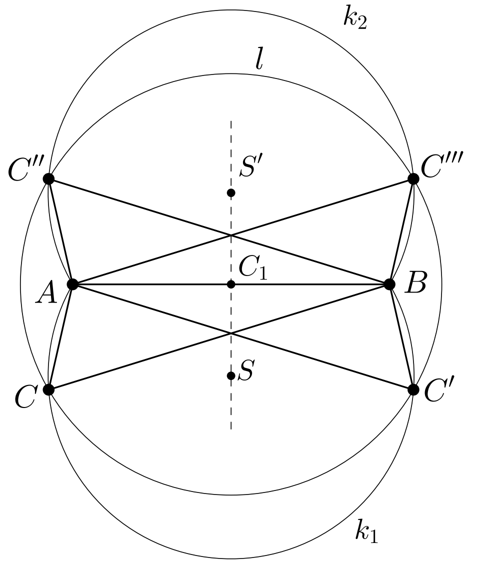
Obrázek 2.30: Ilustrace podmínek řešitelnosti úlohy 6

Úloha je řešitelná, pokud $t_c \leq \frac{c}{2} \cdot \frac{\cos\gamma+1}{\sin\gamma}$.

Pro

- $t_c < \frac{c}{2} \cdot \frac{\cos\gamma+1}{\sin\gamma}$, vzniknou 4 shodné trojúhelníky (viz obrázek 2.31),
- $t_c = \frac{c}{2} \cdot \frac{\cos\gamma+1}{\sin\gamma}$, vzniknou pouze 2 shodné trojúhelníky.

Počet řešení: Úloha je nepolohová, tedy má pouze 1 řešení při splnění podmínky řešitelnosti.



Obrázek 2.31: Konstrukce úlohy 6

2.2.7 Thaletova kružnice

Thaletova kružnice je speciálním případem ekvigonály úsečky a to pro úhel $\alpha = 90°$.

Definice 23. [19, str. 94] *Thaletova kružnice* je množina vrcholů všech pravých úhlů, jejichž ramena procházejí danými body A, B $(A \neq B)$, tj. množina všech bodů, z nichž vidíme danou úsečku AB pod pravým úhlem.

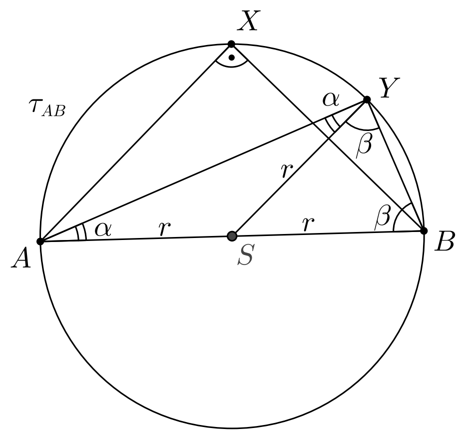
Thaletovu kružnici budeme značit řeckým písmenem τ. Definici lze zapsat i symbolicky

$$\tau_{AB} = \{X \in \rho : |\angle AXB| = 90°\}.$$

Tvrzení 8. *[19, str. 94] Thaletova kružnice je kružnice s průměrem $|AB|$ kromě bodů A, B.*

Důkaz. Je dána úsečka AB s nenulovou délkou. Chceme dokázat, že

1. libovolný bod X různý od bodů A, B, pro který platí $|\angle AXB| = 90°$, leží na kružnici τ_{AB} s průměrem $d = |AB|$,
2. pro libovolný bod Y různý od bodů A, B, který leží na kružnici τ_{AB} s průměrem $d = |AB|$, platí, že $|\angle AYB| = 90°$.



Obrázek 2.32: Thaletova kružnice

V 1. bodě předpokládáme, že trojúhelník ABX je pravoúhlý, tedy střed kružnice jemu opsané leží ve středu přepony AB (viz podkapitola 1.3 Kružnice opsaná a vepsaná). Poloměr této kružnice je roven polovině délky přepony, proto průměr je roven $|AB|$. Bod C leží na kružnici τ_{AB} (viz obrázek 2.32).

Z předpokladu 2. bodu pro bod Y platí, že leží na kružnici τ_{AB} s průměrem AB. Jedná se tedy o kružnici trojúhelníku opsanou a platí, že $|SA| = |SB| = |SC| = r$. Z toho vyplývá, že trojúhelník BYS je rovnoramenný, a proto $|\angle YBS| = |\angle BYS| = \beta$. Analogicky platí v rovnoramenném trojúhelníku AYS, že $|\angle YAS| = |\angle AYS| = \alpha$. Pro součet vnitřních úhlů v trojúhelníku ABY tedy platí

$$\begin{aligned}
|\angle BAY| + |\angle ABY| + |\angle AYB| &= 180^\circ \\
\alpha + \beta + \alpha + \beta &= 180^\circ \\
2 \cdot (\alpha + \beta) &= 180^\circ \\
\alpha + \beta &= 90^\circ \\
|\angle AYB| &= 90^\circ.
\end{aligned}$$

Úhel $\angle AYB$ je pravý. □

Konstrukce (viz obrázek 2.32) je velice jednoduchá, protože délka úsečky AB je rovna průměru konstruované kružnice.

1. Sestrojíme úsečku AB a její střed S.

2. Sestrojíme kružnici se středem v bodě S a poloměrem $r = \frac{1}{2}|AB|$.

Sestrojená kružnice je hledaná Thaletova kružnice.

Úloha 7. Sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li velikost strany c, výšky v_c a těžnice t_c.

Řešení: Úloha je nepolohová, je nutná diskuse řešitelnosti a volba umístění jednoho zadaného prvku do roviny.

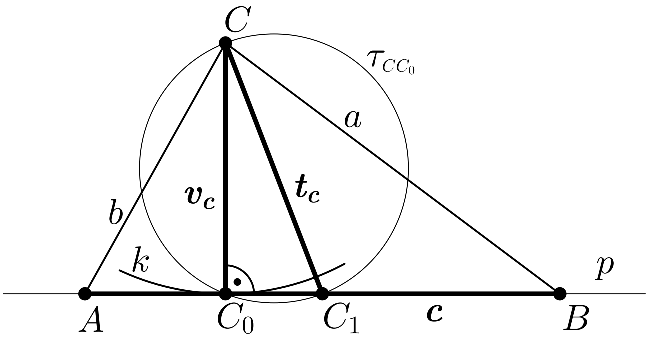
Rozbor: (viz obrázek 2.33)

Zvolíme těžnici CC_1 o velikosti t_c a sestrojíme ji. Pata výšky C_0 leží na Thaletově kružnici τ nad průměrem CC_1 a také na kružnici k se středem ve vrcholu C a poloměrem v_c. Vrcholy A, B leží na přímce $\overleftrightarrow{C_1C_0}$ a platí, že C_1 je střed úsečky AB, což znamená, že $|AC_1| = |BC_1| = \frac{c}{2}$. Symbolicky:

1) Je dána těžnice t_c.

2) Bod $C_0 \in \tau_{CC_1} \wedge C_0 \in k(C, v_c)$.

3) Vrcholy $A, B \in C_1C_0$ a platí $|AC_1| = |BC_1| = \frac{c}{2}$.



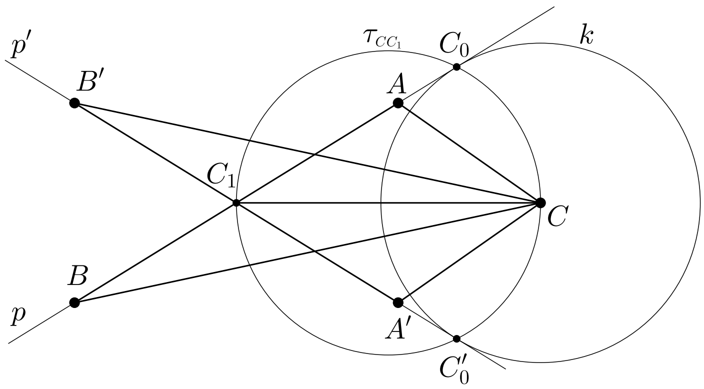
Obrázek 2.33: Náčrt k úloze 7

Popis konstrukce:

1. $CC_1; |CC_1| = t_c$
2. $k;\ k(C, v_c)$
3. τ_{CC_1}
4. $C_0;\ C_0 \in k \cap \tau_{CC_1}$
5. $p; p = \overleftrightarrow{C_1C_0}$
6. $A; A \in p \wedge |AC_1| = \frac{c}{2}$
7. $B; B \in p \wedge |BC_1| = \frac{c}{2} \wedge A \neq B$
8. $\triangle ABC$

Diskuse a počet řešení: Existence trojúhelníku závisí na velikostech těžnice t_c a výšky v_c. Pokud by platilo, že $t_c < v_c$, tak trojúhelník ABC podle zadaných podmínek nelze sestrojit, neboť by nevznikl žádný průsečík kružnic k a τ_{CC_1} s průměrem $t_c = |CC_1|$. Počet řešení této úlohy určíme za podmínky, že platí $t_c \geq v_c$. Je-li

- $t_c = v_c$, kružnice k, τ_{CC_1} mají jediný průsečík, který splyne s bodem C_1. Vznikne jeden hledaný trojúhelník, který je navíc rovnoramenný. Úloha má 1 řešení.



Obrázek 2.34: Konstrukce úlohy 7

- $t_c > v_c$, kružnice se protnou ve dvou bodech C_0, C_0' (viz obrázek 2.34). Vzniknou dva shodné trojúhelníky ABC a $A'B'C$. Protože je však úloha nepolohová, tak i v tomto případě má pouze 1 řešení.

2.3 Metody řešení konstrukčních úloh

Konstrukční úlohy lze řešit několika metodami, je na zvážení řešitele, kterou metodu při řešení použije. Kromě využití množin bodů dané vlastnosti se ve středoškolských učebnicích objevují úlohy, které je vhodné řešit pomocí geometrických zobrazení nebo pomocí výpočtu.

2.3.1 Využití geometrických zobrazení

Geometrická zobrazení v rovině, která každému bodu X roviny přiřadí právě jeden bod X' téže roviny, lze při konstrukčních úlohách využít tak, že nějaký daný nebo hledaný útvar pomocí nich vhodně transformujeme.

Mezi nejvíce používaná geometrická zobrazení v rovině, se kterými se seznámí žáci na střední škole, jsou osová a středová souměrnost, posunutí, otočení či stejnolehlost.

Pro ilustraci řešení konstrukční úlohy pomocí geometrického zobrazení jsme vybrali úlohu, kde využijeme středovou souměrnost. Tuto shodnost nejprve zadefinujeme.

Definice 24. [19, str. 133] Je dán bod S. *Středová souměrnost* se středem S je shodné zobrazení, které přiřazuje

1. každému bodu $X \neq S$ bod X' tak, že bod S je středem úsečky XX' a
2. bodu S bod $S' = S$.

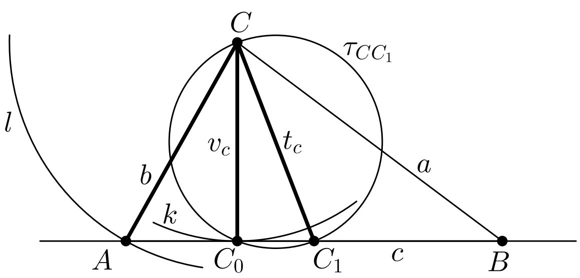
Symbolicky budeme středovou souměrnost značit

$$\mathbf{S}(S) : X \rightarrow X',$$

kde S v závorce se střed souměrnosti. Body X, X' nazýváme body souměrně sdružené podle středu souměrnosti.

Úloha 8. Je dána těžnice t_c, jejíž velikost je $|CC_1| =\ 5\ cm$. Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, pro které dále platí, že $v_c = 2,5\ cm$ a $b = 3\ cm$.

Řešení: Jedná se o polohovou úlohu, takže musíme nejprve sestrojit úsečku CC_1.
Rozbor: (viz obrázek 2.35)
Bod C_0 leží na Thaletově kružnici τ_{CC_1} a na kružnici $k(C, v_c)$. Vrchol A je průsečík přímky $\overleftrightarrow{C_1C_0}$ s kružnicí $l(C, b)$. Zbývající vrchol B leží také na přímce $\overleftrightarrow{C_1C_0}$ a je středově souměrný s bodem A podle bodu C_1, tedy: $\mathbf{S}(C_1) : A \rightarrow B$.

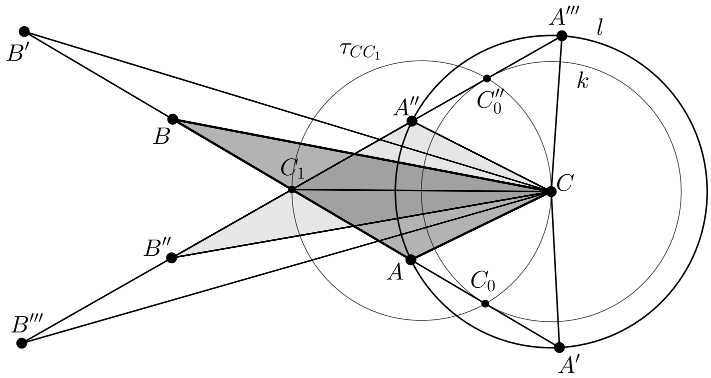


Obrázek 2.35: Náčrt k úloze 8

Popis konstrukce:

1. $CC_1; |CC_1| = 5\ cm$
2. τ_{CC_1}
3. $k;\ k(C, 2,5\ cm)$
4. $C_0;\ C_0 \in\ \tau_{CC_1} \cap\ k$

5. l; $l(C, 3\ cm)$
6. A; $A \in \overleftrightarrow{C_1C_0} \cap\ l$
7. B; $\mathbf{S}(C_1) : A \to B$
8. $\triangle ABC$



Obrázek 2.36: Konstrukce úlohy 8

Zkouška a existence trojúhelníku: Ze zadaných podmínek sestrojíme dva různé průsečíky C_0 podle 4. bodu konstrukce, a pak čtyři různé vrcholy A, které leží na přímce $\overleftrightarrow{C_1C_0}$ a zároveň na kružnici $l(C, 3\ cm)$ (viz 6. bod konstrukce). Středovou souměrností $\mathbf{S}(C_1) : A \to B$ proto vzniknou i čtyři různé vrcholy B, a tedy i čtyři trojúhelníky ABC. Všechny čtyři sestrojené trojúhelníky vyhovují zadaným podmínkám.

Hledaný trojúhelník je zadán prvky s konkrétními metrickými hodnotami, proto je jeho existence prokázána konstrukcí (viz obrázek 2.36).
Počet řešení: Jelikož se jedná o polohovou úlohu, má úloha čtyři různá řešení, i když konstrukcí sestrojíme dvě dvojice shodných trojúhelníků.

2.3.2 Využití algebraických výpočtů

Tato metoda nabízí možnost propojení geometrie s algebrou, konkrétně algebraických výpočtů a geometrických konstrukcí prvků. Jedná se o hledaní vhodných vztahů mezi délkami a velikostmi zadaných prvků s prvky hledanými pomocí známých geometrických vět (výpočet obsahu, obvodu, goniometrické vzorce,...), sestavování rovnic popř. soustav rovnic, a jejich řešení.

Jako reprezentanta této metody jsme zvolili úlohu, která je analogií úlohy 5 z oddílu 2.2.5 *Osa úhlu*.

Úloha 9. Sestrojte trojúhelník ABC, jsou-li dány délky strany a, její příslušné výšky v_a a velikost poloměru ρ kružnice trojúhelníku vepsané.

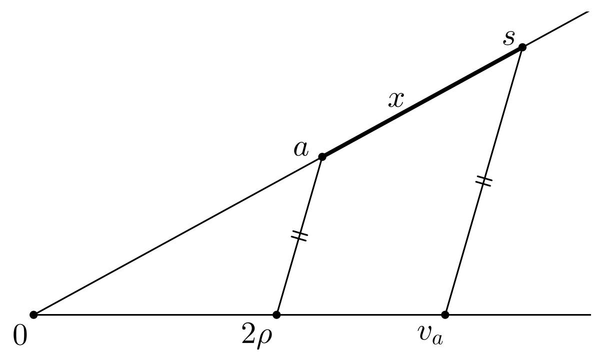
Řešení: [13, str. 41] Nejprve využijeme znalosti dvou různých vzorců pro výpočet obsahu trojúhelníku a to:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\, a \cdot v_a \\ S &= s \cdot \rho, \ kde \quad s = \frac{a+b+c}{2}\ . \end{aligned}$$

Odtud platí rovnost

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\, a \cdot v_a &= s \cdot \rho \\ \frac{v_a}{2\rho} &= \frac{s}{a}. \end{aligned}$$

Z této rovnosti určíme délku úsečky s – pomocí čtvrté geometrické úměrné (viz obrázek 2.37).



Obrázek 2.37: Čtvrtá geometrická úměrná

Abychom mohli sestrojit trojúhelník AVT_{AB}, kde T_{AB} je bod dotyku kružnice trojúhelníku vepsané se stranou AB a V je střed kružnice trojúhelníku vepsané, potřebujeme určit délku úsečky $|AT_{AB}| = x$. K tomu využijeme mocnost bodu ke kružnici, kdy platí, že $|AT_{AB}| = |AT_{AC}|$, kde T_{AC} je bod dotyku kružnice trojúhelníku vepsané se stranou AC. Analogicky vznikne i bod dotyku T_{BC}. Označme velikost úseček

$|BT_{AB}| = |BT_{BC}| = y$ a $|CT_{CA}| = |CT_{CB}| = z$. Pak obvod trojúhelníku ABC lze vyjádřit dvěma způsoby

$$\begin{aligned} o &= a+b+c \\ o &= y+z+z+x+x+y. \end{aligned}$$

Odtud platí rovnost

$$\begin{aligned} a+b+c &= 2x+2y+2z \\ \frac{a+b+c}{2} &= x+y+z \\ s &= x+y+z \\ s &= x+a \\ x &= s-a. \end{aligned}$$

V trojúhelníku AVT_{AB} známe tedy délky stran $|AT_{AB}| = s - a$ a $|T_{AB}V| = \rho$ a velikost úhlu $|\angle VT_{AB}A| = 90°$.

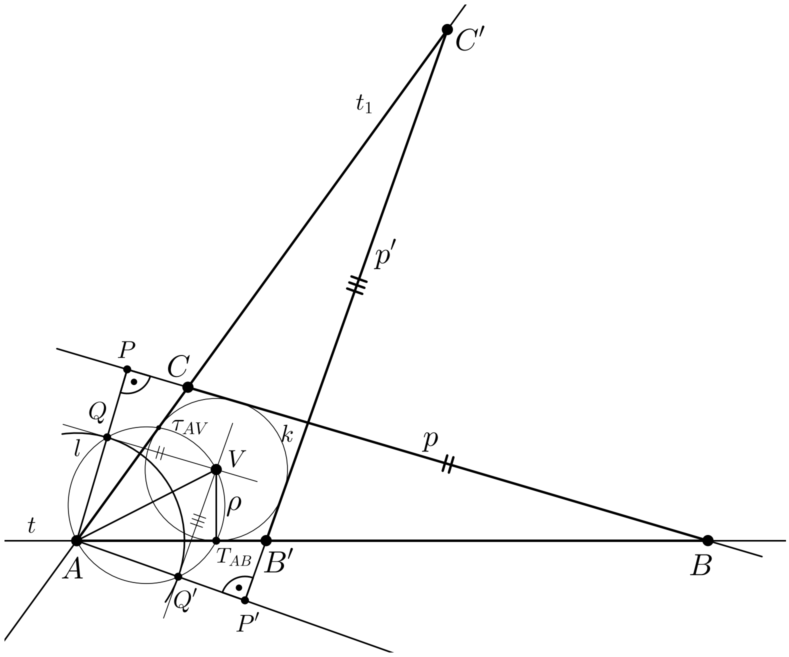
Dále sestrojíme kružnici vepsanou $k(V,\rho)$ a tečny t, t_1 z bodu A ke kružnici k, $t = \overleftrightarrow{AT_{AB}}$ (viz obrázek 2.38). Ke konstrukci zbývajících vrcholů trojúhelníku ABC využijeme pomocný bod Q, který leží na rovnoběžce s přímkou $\overleftrightarrow{BC}$ procházející bodem V, vzdálenost rovnoběžek je rovna ρ. Protože vzdálenost bodu A od přímky $\overleftrightarrow{BC}$ je rovna v_a, pak bod Q leží na kružnici $l(A, v_a - \rho)$. Bod Q zároveň leží na Thaletově kružnici τ_{AV}, aby $|\angle AQV| = 90°$, neboť pravý úhel svírá také tečna $\overleftrightarrow{BC}$ v bodě dotyku T_{BC} s přímkou $\overleftrightarrow{VT_{BC}}$. Na polopřímce $\overrightarrow{AQ}$ sestrojíme bod P tak, že $|AP| = v_a$. Bod P je tedy patou kolmice vedené z bodu A na přímku $\overleftrightarrow{BC}$. Na závěr sestrojíme přímku p, která je rovnoběžná s přímkou $\overleftrightarrow{QV}$ a prochází bodem P. Vrchol B je průsečík přímky p s tečnou t a vrchol C s tečnou t_1.

Diskuse řešitelnosti: Pro existenci úsečky x musí platí, že $s > a$, tedy i $v_a > 2\rho$. Z pravoúhlého trojúhelníku AVT_{AB} získáme podmínku

$$|AV|^2 = x^2 + \rho^2.$$

Abychom mohli sestrojit bod Q, musí platit, že $|AQ| \leq |AV|$, což znamená, že

$$v_a - \rho \leq \sqrt{x^2 + \rho^2}.$$



Obrázek 2.38: Konstrukce úlohy 9

Pro úplnost ještě vyjádříme délku x pomocí zadaných prvků. Víme, že $x = s - a$ a z rovnice vyjadřující rovnost obsahů trojúhelníku $\frac{v_a}{2\rho} = \frac{s}{a}$ získáváme vyjádření pro délku $s = \frac{a \cdot v_a}{2\rho}$. Po dosazení do rovnosti $x = s - a$ dostáváme

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{a \cdot v_a}{2\rho} - a \\
x &= \frac{a \cdot v_a - 2a\rho}{2\rho} \\
x &= \frac{a \cdot (v_a - 2\rho)}{2\rho}.
\end{aligned}
$$

Úloha je tedy řešitelná, pokud $2\rho < v_a \leq \rho + \sqrt{(\frac{a \cdot (v_a - 2\rho)}{2\rho})^2 + \rho^2}$. Při ostrých nerovnostech lze sestrojit 2 shodné trojúhelníky symetrické podle přímky $\overleftrightarrow{AV}$. Úloha má však pouze 1 řešení, protože se jedná o úlohu nepolohovou.

Pokud platí, že $v_a = \rho + \sqrt{(\frac{a \cdot (v_a - 2\rho)}{2\rho})^2 + \rho^2}$, splynou při konstrukci body V a Q a vznikne pouze jeden trojúhelník.

2.3.3 Využití metody souřadnic

Při řešení konstrukčních úloh můžeme využít i znalosti z analytické geometrie. Podle Poláka [18, str. 590] rozlišujeme dva základní typy úloh. První skupinou jsou úlohy, ve kterých známe analytická vyjádření potřebných množin bodů. Do druhé skupiny patří úlohy, kde musíme analytická vyjádření potřebných množin bodů nejprve určit.

Obecný postup, jak řešit konstrukční úlohy pomocí analytické geometrie, má následující kroky:

- Vhodně zvolíme soustavu souřadnic a určíme souřadnice daných bodů.
- Pomocí analytického vyjádření zapíšeme vlastnosti hledaného bodu.
- Ověříme, zda všechny body, které splňují daná analytická vyjádření, mají požadovanou vlastnost.
- Algebraicky řešíme rovnice popř. soustavy rovnic, abychom určili souřadnice hledaného bodu.

Využití metody souřadnic budeme prezentovat na úloze 1 z oddílu 2.2.1 *Kružnice*.

Úloha 10. Je dána úsečka BC ($|BC| = 4\ cm$). Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, pro které platí: $b = 2\ cm, \beta = 30°$.

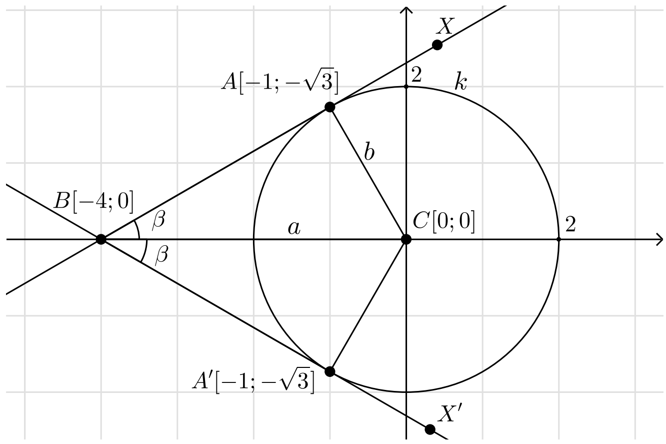
Řešení: Zvolme vrchol C počátkem kartézské soustavy souřadnic *0xy*, tedy bodem o souřadnicích $[0; 0]$, a vrchol B, za podmínky $|BC| = 4\ cm$, bodem o souřadnicích $[-4; 0]$ (viz obrázek 2.39). Přímka $\overleftrightarrow{BC}$ má tedy směrový vektor $\overrightarrow{u} = C - B = (4; 0) \sim (1; 0)$.

Hledaný vrchol A leží na kružnici $k(C, 2\ cm)$ a na přímce $\overleftrightarrow{BX}$, která svírá s přímkou $\overleftrightarrow{BC}$ úhel $\beta = 30°$. Obě tyto množiny zapíšeme analyticky:

$$k: \ x^2 + y^2 = 4$$

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{BX}: x &= -4 + ph \\ y &= qh, h \in R, \end{aligned}$$

kde $\overrightarrow{v} = (p; q)$ je směrový vektor přímky $\overleftrightarrow{BX}$.



Obrázek 2.39: Řešení úlohy 10 pomocí analytické geometrie

Abychom určili souřadnice vrcholu A, musíme vyřešit soustavu těchto rovnic.

Ještě předtím však využijeme znalosti velikosti úhlu β. Velikost úhlu je odchylkou přímek $\overleftrightarrow{BX}$ a $\overleftrightarrow{BC}$, proto platí:

$$\cos\beta = \frac{|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}|}{\|\overrightarrow{u}\|\cdot\|\overrightarrow{v}\|}.$$

Po dosazení a úpravách dostáváme rovnost:

$$\begin{aligned}
\cos 30^\circ &= \frac{|1\cdot p + 0\cdot q|}{1\cdot\sqrt{p^2+q^2}}\\
\frac{\sqrt{3}}{2} &= \frac{|p|}{\sqrt{p^2+q^2}}\\
\sqrt{3}\cdot\sqrt{p^2+q^2} &= 2|p| \qquad /^2\\
3p^2+3q^2 &= 4p^2\\
3q^2 &= p^2\\
p &= \pm\sqrt{3}q.
\end{aligned}$$

Touto úpravou jsme dostali vztah mezi jednotlivými souřadnicemi směrového vektoru $\overrightarrow{v}$. Při volbě $q = 1$ dostaneme souřadnice $\overrightarrow{v} = (\sqrt{3};1)$, nebo $\overrightarrow{v} = (-\sqrt{3};1)$. Parametrickou rovnici přímky můžeme tedy upravit do tvaru

$$x = -4+\sqrt{3}h,\ y = 1h, h \in R \textit{ nebo} \tag{2.1}$$

$$x = -4-\sqrt{3}h,\ y = 1h, h \in R. \tag{2.2}$$

Tyto rovnosti postupně dosadíme do rovnice kružnice k a vyřešíme ji. Nejprve řešíme dosazením rovnic (2.1).

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4 \\ (-4+\sqrt{3}h)^2 + h^2 &= 4 \\ 16 - 8\sqrt{3}h + 3h^2 + h^2 &= 4 \\ 4h^2 - 8\sqrt{3}h + 12 &= 0 \qquad / : 4 \\ h^2 - 2\sqrt{3}h + 3 &= 0 \end{aligned}$$

Diskriminant kvadratické rovnice $D = (-2\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 3 = 12 - 12 = 0$. Tedy rovnice kružnice má jeden dvojnásobný kořen $h_1 = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. To znamená, že přímka $\overleftrightarrow{BX}$ a kružnice k mají jeden průsečík (A). Ten získáme dosazením kořene zpět do parametrické rovnice přímky $\overleftrightarrow{BX}$.

$$\begin{aligned} x &= -4 + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = -1, \\ y &= 1 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}, \end{aligned}$$

tedy x-ová souřadnice vrcholu A je rovna -1 a y-ová $\sqrt{3}$.

Analogicky dosadíme do rovnice kružnice i parametrické vyjádření přímky $\overleftrightarrow{BX}$ se směrovým vektorem $\overrightarrow{v} = (-\sqrt{3}; 1)$ – viz rovnice (2.2). Řešením je opět dvojnásobný kořen $h_2 = -\sqrt{3}$. Jeho dosazením do rovnic přímky $\overleftrightarrow{BX}$ získáme souřadnice vrcholu $A[-1; -\sqrt{3}]$.

Lze tedy sestrojit dva trojúhelníky ABC, které jsou shodné. Úloha je polohová, takže má 2 řešení.

Kapitola 3

Problémy žáků s konstrukčními úlohami

Hned na úvod si položme otázku, proč jsou pro žáky konstrukční úlohy obávanou a náročnou částí učiva? Faktorů může být mnoho a mohou se u žáků různých škol a různých tříd lišit. Mohou to být faktory, které závisí na učiteli, jako například jeho přístup k danému učivu, znalosti a odbornost, srozumitelnost jeho výkladu, schopnost žáky motivovat. Z pohledu žáků ovlivňují pochopení konstrukčních úloh mimo jiné jejich zaujetí pro geometrii, jejich prostorová představivost nebo dříve získané zkušenosti a znalosti.

Pro žáky je důležité pochopit, co vlastně znamená něco *sestrojit*, např. sestrojit trojúhelník z daných prvků. Žáci se mnohdy domnívají, že cílem takového úkolu je narýsovat daný útvar, což není úplně správně. Výsledkem *sestrojení* trojúhelníku podle Vyšína a kol. [25, str. 195] je určení konstrukčního předpisu – posloupnosti jednotlivých na sebe navazujících kroků, které vedou k vyřešení úlohy. Pro jejich určení je zcela zásadní správný a podrobný rozbor úlohy. Samotné narýsování trojúhelníku je součástí řešení, stejně tak jako určení počtu řešení úlohy či diskuse její řešitelnosti.

Leischner [14] zmiňuje, že žáci se při řešení konstrukčních úloh spíše soustředí na sepsání postupných kroků konstrukce a následné narýsování obrazce na základě těchto kroků. Nesnaží se o podrobný rozbor a porozumění celé úloze, což se u lehčích úloh nemusí projevit. Problém nastane, až když má žák vyřešit složitější úlohu, u které je pro vyřešení zapotřebí například využití nějaké vlastnosti daného trojúhelníku nebo konstrukce pomocného trojúhelníku.

Problémy žáků při řešení konstrukčních úloh se zabývaly Naďa Vondrová a Radka Havlíčková [23, str. 133–179]. V následujícím oddíle shrneme jejich hlavní zjištění.

3.1 Prostor reprezentací vs. teoretický prostor

Autorky uvádějí, že kritickým místem pro žáka je práce s geometrickými obrázky. Žák zaměňuje ideální objekt (např. trojúhelník s danými velikostmi vnitřních úhlů) za určitý konkrétní případ (nakreslí si tento trojúhelník s konkrétními velikostmi stran a pokládá ho za jediného reprezentanta). Tento problém vzniká proto, že si žák neuvědomuje, že přechází mezi dvěma různými vnímáními objektů v geometrii, které autorky na základě prací C. Labordeové [12] označují jako prostor reprezentací a teoretický prostor.

> Do teoretického prostoru patří ty činnosti žáka, v nichž se odkazuje na vlastnosti ideálních geometrických objektů a geometrické věty (např. při důkazu nějakého geometrického tvrzení). Do prostoru reprezentací patří činnosti typu rýsování či kreslení obrázku, pohyb s obrázkem, měření pravítkem apod. [23, str. 134]

Pro žáky je náročné, že mezi těmito prostory při řešení konstrukčních úloh musí přecházet opakovaně. Jedná se totiž o úlohy, kdy jsou žákům v teoretickém prostoru zadány podmínky pro hledaný objekt, ale výsledná konstrukce je z prostoru reprezentací [23]. V rozboru dochází k prolínání mezi oběma prostory. Náčrt obrázku je jedním konkrétním reprezentantem z prostoru reprezentací, ale rozbor úlohy a hledání postupných kroků řešení musí probíhat v prostoru teoretickém. Náčrt má být pro žáky pomůckou k uvědomění si vztahů mezi objekty, hledání průniků množin bodů a nalezení postupu k sestrojení hledaného trojúhelníku. Žáci se navíc často dopouštějí chybné úvahy, kdy z obrázku vyčtou vlastnost, která není obecně platná, například se z nákresu domnívají, že těžnice dělí příslušný vnitřní úhel na poloviny. Je tedy vidět, že neodlišují oba zmíněné prostory.

Postup konstrukce se provádí v teoretickém prostoru a konstrukce, kterou žák provádí na základě sestavení tohoto postupu, je opět z prostoru reprezentací. V teoretickém prostoru probíhá také diskuse, ve které žáci musí určit všechny možné situace, které mohou při volbě hodnot parametrů nastat. To může být pro žáky, kteří pracují hlavně s prostorem reprezentací, velmi náročné.

3.2 Obecnost vs. konkrétnost zadání

Zde opět narážíme na náročnost geometrie v porovnání s algebrou, kde lze obecnost čísla vyjádřit jednoduše pomocí písmen, zatímco v geometrii představuje obecný obrázek vždy nějaký konkrétní objekt, a to i když má reprezentovat objekt abstraktní [24, str. 25]. To souvisí se schopností žáka rozlišovat a propojovat teoretický prostor s prostorem reprezentací. Žáci často neumí pracovat s úlohami, kde nejsou zadány konkrétní číselné hodnoty. Proto i my do našeho výzkumu zařadíme úlohu (úloha 2 v hlavní studii), kde budou prvky, ze kterých mají žáci sestrojit trojúhelník, zadány s nekonkrétními rozměry. Budeme sledovat, jak zvládnou jednotlivé části řešení konstrukční úlohy, zejména se zaměříme na diskusi řešitelnosti obecně zadané úlohy.

3.3 Problematika prototypů

Je běžné, že když požádáme žáky, aby nakreslili libovolný trojúhelník, nejčastěji bude buď pravoúhlý, nebo rovnoramenný. To je problém tzv. prototypů. Vondrová a Havlíčková [23, str. 136] uvádí: „prototypem je takový příklad pojmu, který žáci nejčastěji vybírají jako reprezentanta dané kategorie.“ Většinou se jedná o příklady, se kterými se žáci setkávají nejdříve nebo nejčastěji. Žáci si je zafixují ve své představě a propojí si pojem s vizuální představou. Tvoření prototypů se nedá zabránit, ale učitel může vhodnou výukou žákovy představy oslabit [23].

Při řešení konstrukčních úloh se nejčastěji setkáme s tvořením prototypů geometrických útvarů a prototypu značení útvarů. Jak již bylo zmíněno, žáci si při náčrtu nejčastěji nakreslí prototypický trojúhelník, který může mít nějaké vlastnosti, které ale obecně pro trojúhelník neplatí. Žáky to může svádět k nesprávným úvahám případně i k nesprávnému řešení. Prototypem značení trojúhelníku máme na mysli označení vrcholů trojúhelníku písmeny A, B, C. Ve většině učebnic [19, 13, 5, 16, 9] jsou všechny úlohy zaměřené na sestrojení trojúhelníku ABC. Pouze v učebnici [22] nalezneme v kapitole o konstrukčních úlohách i trojúhelníky jiných označení. Proto chceme v našem výzkumu mimo jiné zjistit, zda žákům způsobí potíže, když budou muset sestrojit trojúhelník jiného značení.

3.4 Problematika porozumění pojmům, zápisům, terminologii,...

Při řešení konstrukčních úloh je důležité, aby žák rozuměl všem pojmům, které se v úlohách vyskytují, znal vlastnosti trojúhelníku i jiných útvarů (těžiště, výška,...), množin bodů dané vlastnosti a uměl je vhodně aplikovat při řešení.

Mnoho žáků zná pojmy, ale neví, co znamenají a jak je použít. Příkladem může být znalost pojmu kružnice vepsané, ale neschopnost žáka tuto kružnici v daném trojúhelníku zkonstruovat. Autorky [23] uvádějí, že tito žáci se zaměřují pouze na formální stránku a chybí jim hlubší porozumění, které se při řešení snadnějších úloh nemusí projevit. Je proto důležité, aby učitelé cíleně diskutovali se žáky, jak daným pojmům rozumí, a rozvíjeli tak jejich pochopení. U konstrukčních úloh souvisí problematika porozumění také s formálním zápisem rozboru úlohy či postupu konstrukce. Žáci se nazpaměť učí symbolické zápisy, kterým ne vždy rozumí. Pak je pro ně velice obtížná konstrukce hledaného útvaru.

Další skupinou žáků jsou ti, kteří znají pojem, umí ho zkonstruovat, ale nerozumí mu. Příkladem může být osa úsečky, kterou žáci pomocí naučeného postupu umí sestrojit, ale mají problém s jejím využitím v úloze, kde je zapotřebí sestrojit množinu bodů stejně vzdálených od dvou daných bodů (příklady je možné najít v [23, str. 171]). Je dobré, aby učitelé předkládali žákům i úlohy, které nejsou pouze o konstrukci určité množiny bodů dané vlastnosti, ale aby dokázali na základě nějaké vlastnosti množiny bodů určit, o jakou množinu se jedná. Podle autorů [24, str. 28] to může u žáků pomoci rozvíjet jejich schopnosti najít posloupnost kroků vedoucích k vyřešení dané konstrukční úlohy, ale také podporovat experimentální a manipulativní fázi řešení. I to bychom rádi otestovali v našem výzkumu pomocí úlohy, která bude zaměřena na určení množiny bodů dané vlastnosti (konkrétně ekvigonály úsečky a středu kružnice opsané) bez toho, abychom tyto pojmy uvedli v zadání.

3.5 Korektnost konstrukce

S porozuměním pojmům a terminologií souvisí i to, zda žáci při rýsování úlohy provádí korektní konstrukce. Jak uvádějí autorky [23], žáci mají často správnou představu výsledného útvaru, ale neznají posloupnost konstrukčních kroků, která by k jeho narýsování vedla. Příklady tzv. přibližných konstrukcí u žáků základních škol uvádí autorky [23, str. 158]. Pro nás bude ve výzkumu zajímavé sledovat, zda se nekorektním konstrukcím dokáží žáci středních škol vyhnout, nebo je to i pro ně problémová část řešení. K tomu využijeme, že organizátorka výzkumu bude moci alespoň některé žáky sledovat i při jejich samostatném řešení úloh (hlavně v pilotní studii). Pokusí se tak zachytit jejich myšlenkové pochody a pokusy při konstrukcích jednotlivých útvarů. Dále se pokusíme zanalyzovat narýsované útvary, které žáci odevzdají. Např. v úloze 4 (hlavní studie) se budeme soustředit na konstrukci vrcholu B, pro který je potřeba sestrojit tečnu k dané kružnici a správně určit jejich společný bod dotyku.

3.6 Role jednotlivých částí konstrukční úlohy

Konstrukční úlohy se na středních školách řeší podle klasického schématu: rozbor, postup konstrukce a jeho narýsování, zkouška, diskuse řešitelnosti a určení počtu řešení (viz [19, str. 99]). Jak ale upozorňuje Leischner [14], žáci se soustředí hlavně na „nakreslení řešení“ (často bez rozboru) a na podrobný zápis postupu konstrukce. Chybí zdůvodňování jednotlivých kroků (diskuse a zkouška), čímž se vytrácí fáze dokazování, kterou si žáci u konstrukčních úloh mají osvojit. Tento žákovský problém se projeví u složitějších úloh.

Při rozboru je žákům učiteli doporučován dostatečně obecný náčrt řešení, ale jak zmiňují autorky [23], někteří žáci jsou schopni úlohu vyřešit i bez využití náčrtu. Další skupinou jsou žáci, kteří si náčrt nakreslí, ale použijí prototypický útvar, kvůli němuž pak úlohu špatně vyřeší. Bude pro nás ve výzkumu velmi zajímavé sledovat, jakou důležitost má náčrt pro žáky. Při analyzování žákovských řešení se zaměříme na to, jestli si žáci v úlohách náčrt dělají, jak moc je obecný a velký, zda v něm označují všechny prvky, a také jestli dělají pouze jeden náčrt, nebo např. pro speciální případy kreslí další. Také budeme zkoumat jakou funkci pro ně načrtnutý obrázek má z hlediska řešení celé úlohy (to zjistí organizátorka výzkumu z rozhovorů), a jestli píší rozbor úlohy a správně v něm argumentují.

Postup konstrukce na středních školách je vyžadován pomocí symbolických zápisů a má následovat po rozboru. Podle něho pak má být narýsováno řešení úlohy [19, str. 100]. Vondrová a Havlíčková [23] uvádějí, že někteří žáci mají problém popsat konstrukci krok po kroku slovy (v jejich výzkumu se však jedná o žáky základní školy, u nichž nebyl vyžadován symbolický zápis konstrukce), ale dokáží hledaný útvar pomocí konstrukčních pomůcek zkonstruovat. Pro nás je otázkou, jak žáci středních škol ovládají symbolický zápis. Proto jsme do výzkumu zařadili úlohu (3 v hlavní studii), kde je zadán popis konstrukce (symbolicky) a úkolem žáka je, aby podle něho dokázal úlohu sestrojit. V ostatních úlohách musí žák popis konstrukce sepsat. Pokud si nebude vědět rady, požádáme ho v rozhovoru, aby se pokusil postup popsat alespoň vlastními slovy. Tím chceme sledovat, zda má žák pouze problémy s ovládáním symboliky, nebo i s posloupností jednotlivých kroků zápisu konstrukce. Samozřejmě nesmíme zapomenout vždy porovnat postup konstrukce s rozborem, protože nesprávný rozbor úlohy povede žáka i k nesprávnému zápisu konstrukce, což pak nelze vyhodnotit jako problém žáka s popisem konstrukce, ale s rozborem úlohy. Druhým jevem, který budeme pozorovat, je, zda žáci dokáží postup konstrukce sepsat hned po ukončení rozboru, nebo dávají přednost konstrukci úlohy, a pak z ní zpětně zapisují postup. To může vést k nepřesným hypotézám s ohledem na obecnost úlohy a hledání všech možných řešení.

Neméně důležitou částí konstrukčních úloh je zkouška správnosti, která ověří, zda všechna řešení úlohy splňují zadané podmínky (viz kapitola 2.1). Jak uvádí autoři [25, str. 192], správný postup konstrukce určí pouze všechn možná řešení úlohy, ale až zpětné přezkoumání sestrojených útvarů nám zajistí, že z řešení vyloučíme útvary, které nevyhovují podmínkám úlohy. Podle našich zkušeností předpokládáme, že žáci tento fakt opomíjejí a za řešení úlohy považují počet všech zkonstruovaných útvarů. Takovou úlohu (4 v hlavní studii), kdy je potřeba některá řešení zkouškou vyloučit, jsme přidali do výzkumu, abychom si mohli naši hypotézu potvrdit, nebo vyvrátit. Dále organizátorka výzkumu zanalyzuje, zda sami žáci v každé úloze provedou zkoušku před určením počtu řešení, nebo je k tomu organizátorka bude muset vyzvat.

V úlohách, které jsou zadány parametricky je nutné provést diskusi řešitelnosti a určit existenci hledaného útvaru. Jak uvádí Leischner [15, str. 36] diskuse řešitelnosti je cenná pro rozvoj žáka v oblasti geometrických představ a kombinatorického myšlení. Proto jsme do výzkumu zařadili parametrickou úlohu (2 v hlavní studii) a v rozhovorech budeme sledovat, jak žáci nad řešením úlohy (existencí a počtem řešení) přemýšlí, zda si sami uvědomují nutnost provedení diskuse, nebo ji naopak úplně opomíjejí. Pro diskusi jsme vybrali pouze jednodušší úlohu, aby žáci, kteří diskusi řešitelnosti nedělají, byli schopni po vyzvání organizátorkou výzkumu podmínky existence a řešitelnosti úlohy během rozhovoru vymyslet a správně určit.

Jak jsme zmínili v kapitole 2.1, konstrukční úlohy bývají často děleny na polohové a nepolohové (viz [19, str. 100]). V závislosti na tomto dělení se určuje i počet řešení dané úlohy. Proto jsme do výzkumu zařadili oba typy úloh a organizátorka výzkumu bude sledovat, jestli žáci respektují, že u polohové úlohy musí začít umístěním daného prvku do roviny, a jak určí počet řešení.

Na základě výše vyjmenovaných problémů, které by žáci s konstrukčními úlohami mohli mít, a z našich zkušeností předpokládáme, že žáci budou nejvíce selhávat v následujících úkonech. Vybrali jsme tři obecné hypotézy žákovských selhání, další konkrétnější jsou zmíněny v jednotlivých oddílech této kapitoly.

1. hypotéza: Nesprávné porozumění řešení konstrukční úlohy. Předpokládáme, že se žáci chybně domnívají, že řešením konstrukční úlohy je narýsování jednoho

konkrétního řešení úlohy, popřípadě sepsání popisu konstrukce. Tudíž opomíjejí provedení zkoušky či diskuse řešitelnosti, pokud to daná úloha vyžaduje. Proto se budeme během výzkumu žáků ptát, co je pro ně výsledkem konstrukční úlohy.

2. hypotéza: Nesprávné či nedostatečné porozumění množinám bodů dané vlastnosti a jejich špatné užívání. Žáci se během výuky na střední škole seznámí s konkrétními množinami bodů (viz kapitola 2.2), naučí se je pojmenovat a následně narýsovat. Jenže u řešení konstrukční úlohy je zapotřebí používat je obráceně, tedy rozpoznat, na jaké množině, nebo množinách bodů leží hledaný bod. Množinu bodů je pak zapotřebí při konstrukci korektně sestrojit, při popisu konstrukce umět správně zapsat a při určování počtu řešení neopomenout všechny průsečíky konkrétních množin bodů.

3. hypotéza: Nekomplexní rozbor úlohy spojený s využíváním prototypických útvarů, nekvalitním označením geometrických prvků v obrázku a nedostatečně promyšlenými závěry rozboru. Z vlastní zkušenosti se domníváme, že žáci při kreslení náčrtu konstrukční úlohy budou pro nakreslení trojúhelníku využívat prototypické rovnostranné trojúhelníky, které jim pomohou mylně určit nějakou vlastnost v trojúhelníku, popřípadě nějakou obecnou vlastnost opomenout. Dále předpokládáme malé, nepřehledné a nedostatečně označené náčrty, které omezí žákovy úvahy nad vyřešením úlohy.

Část II

Praktická část

Kapitola 4

Výzkum

Ještě předtím, než se začneme zabývat popisem výzkumu naší práce, chceme zmínit Rámcový vzdělávací program pro gymnázia, neboť převážně žáci gymnázia budou respondenty našeho výzkumu. Z RVP pro gymnázia [1] jsme vybrali pouze ty výstupy, které se dotýkají problematiky konstrukčních úloh.
Očekávané výstupy – žák [1, str. 25]

- používá geometrické pojmy, zdůvodňuje a využívá vlastnosti geometrických útvarů v rovině a v prostoru, na základě vlastností třídí útvary,
- určuje vzájemnou polohu lineárních útvarů, vzdálenosti a odchylky,
- využívá náčrt při řešení rovinného nebo prostorového problému,
- řeší polohové a nepolohové konstrukční úlohy užitím všech bodů dané vlastnosti, pomocí shodných zobrazení a pomocí konstrukce na základě výpočtu,
- řeší planimetrické a stereometrické problémy motivované praxí.

Tyto výstupy jsou pro nás základním pilířem do našich úvah o možných chybách a nedostatcích, se kterými se žáci při řešení konstrukčních úloh potýkají.

Výzkum rozvrhneme do několika částí, které nám pomohou co nejlépe odhalit výše zmíněné problémy žáků a případně objevit i nové, námi nepředpokládané, nedostatky. První částí výzkumu bude pilotní studie, která bude obsahovat větší počet úloh. Ty pak organizátorka výzkumu předloží několika (2 – 3) žákům středních škol a provede s nimi zkoumání. Podle závěrů pilotní studie vybereme a upravíme úlohy do studie hlavní. Ta bude provedena s určitým vzorkem žáků a její výsledky podrobně zanalyzujeme. Budeme si všímat všech chyb, kterých se žáci dopustili. Na závěr shrneme výsledky celého výzkumu.

4.1 Metodologie

Cílem našeho výzkumu je zjistit, jaké porozumění konstrukčním úlohám mají žáci středních škol, konkrétně se zaměříme na řešení konstrukčních úloh v trojúhelníku pomocí množin bodů dané vlastnosti. K tomuto záměru využijeme úlohy, které budou žáci řešit individuálně s organizátorkou výzkumu. Nejprve bude každý žák řešit zadané úlohy samostatně, pak s ním organizátorka povede rozhovor o jeho úvahách a postupu, a přitom bude sledovat problémy, které se během žákova řešení vyskytly. Tyto problémy se pokusíme následně analyzovat.

4.1.1 Výběr úloh

Zvolili jsme šest úloh, které ale pro hlavní studii plánujeme podle pilotní studie zredukovat. Úlohy byly vybrány tak, aby se v nich mohly projevit zmíněné problémy z kapitoly 3. Dále jsme se inspirovali úlohami 1–7, které jsme uvedli v kapitole 2.2 v teoretické části.
Poznámka: Protože jsme žákům nechali možnost volby metody řešení vybraných úloh, uvedli jsme v teoretické části v oddíle 2.3 další možnosti řešení konstrukčních úloh, které se na středních školách vyučují. Ty jsme demonstrovali na úlohách 8–10, které jsou obdobou úloh z kapitoly 3.

V tomto oddíle nejprve uvedeme námi vybrané úlohy (bez řešení), a pak se pokusíme o krátkou didaktickou analýzu předpokládaných chyb žáků při jejich řešení.

Úlohy

1. Je dána úsečka AB. Určete a narýsujte množinu všech bodů X, pro které platí $|\angle AXB| = 75°$.

2. Jsou dány body A, B, C, které tvoří trojúhelník. Najděte všechny body, které mají od bodů A, B, C stejnou vzdálenost.
3. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC, když znáte velikosti výšky v_c a těžnice t_a.
4. Proveďte konstrukci podle zadaného popisu konstrukce. Kolik bude mít úloha řešení? (viz úloha 3 *řešení* C v teoretické části)

    1) $k;\ k(S, 2,5\ cm)$
    2) $A;\ A \in k$
    3) $B;\ B \in k\ \wedge\ |\angle ASB| = 150°$
    4) $h;\ h(A, 3,5\ cm)$
    5) τ_{AB}
    6) $A_0;\ A_0 \in h\ \cap\ \tau_{AB}$
    7) $C;\ C \in k\ \cap\ \overrightarrow{BA_0}$
    8) $\triangle ABC$

5. Je dána výška $v_c = 3\ cm$. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li délka strany $b = 4\ cm$ a velikost poloměru kružnice vepsané $\rho = 1\ cm$. (viz úloha 5 v teoretické části)
6. Sestrojte trojúhelník KLM, jestliže znáte délku strany k, výšky v_k a velikost úhlu κ. (obdoba úlohy 6 v teoetické části)

V první úloze mají žáci najít ekvigonálu úsečky a ve druhé střed kružnice opsané, ale ani jeden z těchto pojmů jsme v zadání úlohy nezmínili, protože chceme zkoumat, jak žáci ovládají vlastnosti množin bodů a následně jejich konstrukci. V úlohách navíc nejsou uvedeny žádné délky úseček ani vzdálenosti bodů, bude pouze na žácích, jak si poradí s umístěním bodů na papír.

Třetí úloha je zadána obecně, bez konkrétních číselných údajů a bez umístění do roviny. Chceme zjistit, zda žáci budou využívat náčrt při řešení úlohy, jestli se vyhnou prototypům, jak dokáží přecházet z prostoru reprezentací (náčrt) do prostoru teoretického (závěr rozboru).

Čtvrtá úloha testuje znalost a porozumění symbolickým zápisům v postupu konstrukce. Také nám odhalí, jestli žák při rýsování používá korektní konstrukce a označuje všechny průsečíky (a dál s nimi pracuje), zda rýsuje postupně podle zadaných kroků a žádné nepřeskakuje (a ani žádné nevynechává); a jestli nebude mít problém s libovolným umístěním bodu A na kružnici k.

Pátá úloha je klasickou středoškolskou konstrukční úlohou, kde je vyžadován celý postup řešení. Bude nás zajímat, jak žák při řešení postupuje (posloupnost jeho kroků), co považuje za zásadní části při řešení a co je podle něho řešením úlohy. Úloha je navíc polohová a zároveň jsou zadány konkrétní metrické hodnoty zadaných prvků, se kterými by měl žák během řešení pracovat. Je zde také zařazena konstrukce kružnice trojúhelníku vepsané a její vlastnosti (osa úhlu), které nemusí být pro každého žáka známy nebo s nimi neumí správně pracovat. Jako u předchozí úlohy i zde se zaměříme, jak žák určuje počet řešení a ověřuje správnost svého postupu.

V šesté úloze budeme pozorovat, jak žáci zvládají parametrickou nepolohovou úlohu. To se hlavně projeví při určování počtu řešení a diskusi řešitelnosti, ale také při konstrukci trojúhelníku. Dále nás bude zajímat, jestli nebude pro žáky složité, že trojúhelník není označen tradičně ABC, ale KLM (problematika prototypů). Protože je úloha nepolohová, zaměříme se na to, který zadaný prvek se žák rozhodne umístit do roviny.

4.2 Pilotní studie

Pro pilotní studii jsme vybrali tři žáky středních škol, a to dva maturanty z matematiky na gymnáziu a jednoho žáka 3. ročníku střední průmyslové školy, neboť nás zajímaly i odlišnosti v jejich znalostech a přístupu k řešení úloh. Všichni žáci byli organizátorce výzkumu známi. Záměrně jsme nevybrali žáky, kteří konstrukční úlohy právě probírají ve škole (nebo je právě probrali), protože jsme chtěli vědět, co si žáci pamatují z konstrukčních úloh s odstupem času.

S každým z nich se organizátorka sešla individuálně a předložila jim k vypracování výše zmíněné úlohy. Na vypracování měli dostatek času a směli použít pouze námi určené rýsovací potřeby (jedno „přímé“ pravítko, jeden trojúhelník s ryskou, kružítko a úhloměr), papír a tužku. Organizátorka navíc využila času a žáky při samostatném řešení pozorovala, aby z jejich projevů usoudila, jak asi uvažují a při řešení postupují.

Pak následoval společný rozhovor žáka s organizátorkou.

Všechny žáky jsme ubezpečili o anonymitě a požádali je, abychom si mohli společný rozhovor natočit na video. Také nám odevzdali všechny papíry, které využili, abychom měli možnost vidět všechny jejich pokusy o vyřešení úloh.

Každý z žáků pracoval necelých 90 minut samostatně a rozhovory trvaly v průměru kolem 45 minut.

Z pilotní studie jsme zjistili, že některé úlohy jsou pro žáky jednoduché, protože k jejich vyřešení mají všechny potřebné znalosti, jiné naopak pro neznalost zásadní informace byly pro ně samostatně neřešitelné. Například v první úloze měli všichni problém s konstrukcí ekvigonály úsečky AB, ale při rozhovoru, kde se organizátorka snažila o postupné návodné rady, se žákům podařilo řešení i zkonstruovat.

Druhá úloha žákům nečinila vůbec žádné problémy, maturanti gymnázia měli množinu řádně zkonstruovanou a znali i změny v poloze středu kružnice opsané v závislosti na volbě typu trojúhelníku. Proto jsme se rozhodli tuto úlohu v hlavní studii vynechat. Za zmínku u této úlohy stojí, že žák průmyslové školy zvolil trojúhelník ABC rovnostranný, a tím došel mylně k závěru, že hledanou množinou je střed kružnice vepsané. Na požádání, aby si zvolil jiný typ trojúhelníku (nakreslil tupoúhlý), střed kružnice vepsané vyloučil a hledaný bod určil správně.

Ve třetí a v páté úloze jsme po žácích požadovali celý postup řešení konstrukční úlohy. Pouze jeden žák využíval rozbor k řešení úlohy, ostatní dva si pouze ve chvíli, když už si nevěděli rady s rýsováním pomohli pomocným náčrtem. Za stěžejní část řešení proto považovali právě konstrukci jednoho konkrétního řešení (i když třetí úloha byla zadána obecně). Žádný z žáků ve svém řešení neuvedl zkoušku, popřípadě diskusi řešitelnosti. Na tyto části se pak organizátorka zaměřila v rozhovorech, při nichž žáci pochopili, že pouze výsledné sestrojení trojúhelníku nelze považovat za řešení zadané úlohy.

Jako čtvrtou jsme zařadili úlohu, kterou jsme hlavně zkoumali, jestli žáci zvládnou zkonstruovat trojúhelník podle daného popisu konstrukce. Tyto úlohy a v tomto pořadí určitě zachováme i do hlavní studie, protože zkoumaní žáci ve třetí a v páté úloze nejprve rýsovali, a teprve poté psali popis konstrukce, a čtvrtá úloha po nich chce pravý opak. U jednoho žáka jsme narazili na neznalost symbolu τ_{AB}, a proto jsme se pátý bod popisu konstrukce rozhodli rozšířit o popis této množiny.

Šestá úloha byla pro všechny žáky snadná. Domníváme se, že to bylo tím, že většina v ní zkoumaných úkonů (postup při konstrukční úloze, konstrukce ekvigonály úsečky, řešení obecně zadané úlohy, diskuse řešitelnosti apod.) se už projevila v předchozích úlohách, takže jsme se ji rozhodli pro hlavní studii vynechat. Jediné, na co jsme se v této úloze zaměřili a chtěli bychom zkoumat i dál, je problém prototypického označení trojúhelníku ABC. Proto ve třetí úloze přeznačíme rovnoramenný trojúhelník ABC na trojúhelník KLM.

Ostatní zjištěné problémy, které žáci s těmito úlohami měli, podrobně popíšeme v podkapitole Výsledky (viz oddíl 4.4) společně s poznatky, které jsme zjistili v totožných úlohách během hlavní studie.

4.3 Hlavní studie

4.3.1 Výběr žáků

Pro hlavní studii jsme oslovili gymnázium, které organizátorka výzkumu absolvovala. Po dohodě s učitelem matematiky byli k výzkumu vybráni maturanti z matematiky. Hlavním důvodem bylo, že žáci nižších ročníků neměli kvůli zrušení výuky či online výuce konstrukční úlohy ještě probrané nebo jejich učitelé nebyli ochotni poskytnout žáky k výzkumu, který se nevěnuje aktuálně probíranému učivu. Maturanti navíc tuto možnost přijali s nadšením, že si ověří, jak na tom jsou před maturitou se znalostmi v této oblasti.

Bylo osloveno 7 žáků ze dvou různých tříd čtyřletého gymnázia. Tito žáci měli původně absolvovat výzkum v hodinách matematiky a rozhovor s organizátorkou provést následně o přestávce. Protože se však veškerá výuka přesunula do online prostoru, zkontaktovala se organizátorka individuálně s každým ze žáků a domluvila si s nimi konkrétní čas online hovoru.

4.3.2 Vybrané úlohy

Po provedení pilotní studie byly do hlavní studie vybrány následující úlohy. Ke každé úloze je zároveň uveden základní seznam bodů, na které se během studie zaměřujeme.

Řešení úloh vybraných pro hlavní studii uvedeme v příloze.

1. Je dána úsečka AB. Určete a narýsujte množinu všech bodů X, pro které platí $|\angle AXB| = 75°$.

   Co sledujeme:

   - jak žák pracuje s obecným zadáním (libovolná délka úsečky AB)
   - porozumění úloze (jak chápe pojem *množina bodů*)
   - jak dokáže žák správně určit hledanou množinu a odůvodnit, proč jsou řešením dva kružnicové oblouky
   - korektnost a znalost konstrukce (rozumí provedení jednotlivých kroků)
   - znalost pojmů a jejich vlastností – úsekový a obvodový úhel, tětiva, střed kružnice opsané

2. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník KLM, když znáte velikosti výšky v_m a těžnice t_k.

   Co sledujeme:

   - znalost vlastností rovnoramenného trojúhelníku a práci s nimi
   - znalost těžiště a jeho vlastností
   - jestli žák správně pracuje s obecně zadanou úlohou (hlavně při určení počtu řešení a provedení diskuse řešitelnosti)
   - jak žák určuje prvek, který jako první umístí do roviny (úloh je nepolohová, má možnost výběru)
   - jaká je žákova posloupnost částí, které v úloze provádí (udělá nejdříve rozbor, nebo hned rýsuje,...)
   - jakým způsobem postupuje v rozboru

- jak žák zvládá, že trojúhelník není označen obvyklým značením $\triangle ABC$
- diskusi řešitelnosti – zvláště volbu základny

3. Proveďte konstrukci podle zadaného popisu konstrukce. Kolik bude mít úloha řešení?

    1) $k;\ k(S, 2,5\ cm)$
    2) $A;\ A \in k$
    3) $B;\ B \in k\ \wedge\ |\angle ASB| = 150°$
    4) $h;\ h(A, 3,5\ cm)$
    5) $\tau_{AB};\ \tau_{AB} = \{X \in \rho : |\angle AXB| = 90°\}$
    6) $A_0;\ A_0 \in h\ \cap\ \tau_{AB}$
    7) $C;\ C \in k\ \cap \overrightarrow{BA_0}$
    8) $\triangle ABC$

    Co sledujeme:

    - porozumění jednotlivým krokům
    - zda žák kreslí náčrt obrázku, nebo ho podle zadaných hodnot rýsuje
    - zda žák postupuje postupně, nebo některé kroky rýsuje dříve
    - konstrukce jednotlivých množin a bodů
    - problém libovolného umístění bodu A na kružnici k
    - rýsování všech průsečíků dvou množin
    - práce s více průsečíky a rozšíření úlohy o další řešení
    - určení počtu řešení

4. Je dána výška v_c o velikosti $|CC_0| = 3\ cm$. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li délka strany $b = 4\ cm$ a velikost poloměru kružnice vepsané $\rho = 1\ cm$.
    Co sledujeme:

    - celkový postup při řešení úlohy (zda žák dodržuje formální strukturu)
    - jak žák přistupuje k tomu, že je úloha polohová (umístění výšky v_c do roviny, a teprve pak hledání řešení)

- jakým způsobem postupuje v rozboru (hledání středu kružnice vepsané, hledaní zbývajících vrcholů,...)
- rozbor, nebo pouze náčrt obrázku
- určení počtu řešení úlohy
- ověřuje žák, zda je jeho postup správný (zkouška)
- přesnost konstrukce

4.3.3 Průběh testování

Každý žák obdržel přes email v domluveném čase od organizátorky zadání úloh ve formátu pdf a měl 60 minut na jeho vypracování. Poté se s ním organizátorka spojila online a poprosila ho o zapnutí kamery a souhlas s nahráváním celého rozhovoru.

Žák mohl při řešení používat pouze svá pravítka, kružítko, tužku a papír. Žádné jiné pomůcky ani učební materiály mu nebyly povoleny. Organizátorka to nijak nekontrolovala, spoléhala na žákovu čestnost, proto jsme možnost porušování nastavených pravidel ve výsledcích našeho výzkumu nijak nezohledňovali.

K omezení času samostatné práce jsme se přiklonili z několika důvodů, hlavně jsme však chtěli zamezit tomu, aby žák hledal řešení na internetu nebo v učebnicích, čímž by se zdržoval.

Ve většině případů měli žáci po ukončení samostatné části studie vypracovány či alespoň rozpracovány všechny úlohy. Nenašel se nikdo, kdo by některé úlohy záměrně vynechal a vůbec se nad nimi nezamýšlel. Po dokončení žákovi samostatné práce se s ním organizátorka spojila přes Microsoft Teams a vyzvala ho ke společnému rozhovoru.

Organizátorka měla do rozhovorů připravené otázky, které se vztahovaly k předpokládaným problémům, nejprve však vyzvala každého žáka, aby dle svého uvážení zvolil pořadí úloh a postupně okomentoval svá řešení a zmínil úvahy, podle kterých postupoval. Je zajímavé, že všichni žáci komentovali úlohy v zadaném pořadí, a to i tehdy, když neměli první úlohu vyřešenou nebo alespoň rozpracovanou. Díky dostatečné časové dotaci i ochotě žáků strávit rozhovorem s organizátorkou výzkumu i více než 20 minut se podařilo s každým žákem prodiskutovat všechny zadané úlohy. Naším cílem bylo každou úlohu s žákem dořešit (pokud ji neměl vyřešenou), aby poznal, a snad i porozuměl, řešení úlohy, nad kterou nějakou dobu přemýšlel. Žáci však měli velký zájem znát správná a kompletní řešení úloh. Díky tomu bylo pro organizátorku výzkumu jednodušší diskutovat s žáky o jejich řešení i dávat jim postupné návodné rady, jak v řešení úlohy pokračovat.

Na závěr rozhovoru požádala organizátorka žáka, aby jí veškeré popsané papíry okopíroval a poslal na email. To nám posloužilo pro lepší orientaci při analýze výsledků.

Po provedení všech testování organizátorka seskupila materiály od každého žáka, kterými jsou kopie jeho řešení, nahrávka rozhovoru a soukromé poznámky organizátorky při pozorování žákova řešení. Nejprve jsme žákovská řešení analyzovali z hlediska bodů, které jsme si u každé úlohy stanovili, a přitom jsme se snažili si všímat i jevů, které jsme původně nepředjímali. To samé jsme provedli i u analogických úloh, které řešili žáci pilotní studie, čímž je nám počet řešitelů daných úloh rozšířil na 10 žáků.

Následovalo sjednocení výsledků podle jednotlivých úloh, abychom mohli porovnat četnost chyb a problémů žáků. Ty jsme pak začali seskupovat do určitých kategorií (inspirovali jsme se třemi hlavními hypotézami a strukturou kapitoly 3). Protože naše studie má explorativní charakter, uvedeme ve výsledcích (viz kapitola 4.4) i takové problémy, které se vyskytly pouze u jediného žáka.

4.4 Výsledky

Nejprve budeme prezentovat ty jevy, které se objevily jen u dané úlohy. Poté se podíváme na všechny úlohy z hlediska jevů, které jsme jako důležité identifikovali v kapitole 3.

1. úloha

Řešení této úlohy dělíme na dvě skupiny. Do první spadají řešení žáků, kteří měli znalost ekvigonály úsečky a věděli, že jejím řešením jsou dva souměrné kružnicové oblouky. Druhou skupinou jsou řešení žáků, kteří nevěděli, co je hledanou množinou bodů X. Při následných rozhovorech a s dopomocí organizátorky výzkumu se i těmto žákům podařilo danou množinu určit.

Jirka si během samostatné práce narýsoval jeden konkrétní trojúhelník ABX s úhlem $|\angle AXB| = 75°$ tak, že nejprve narýsoval úhel a pak dorýsoval trojúhelník.

> Organizátorka (dále budeme značit krátce – O): Jirko, bude takový trojúhelník pouze jeden, nebo by šel sestrojit ještě nějaký další?
>
> Jirka: Hmm. Ještě by šel ten na druhé straně. (Myslí osově souměrný podle úsečky AB.)
>
> O: A ještě nějaký?
>
> Jirka: Ne, to je všechno.
>
> O: Takže hledanou množinou všech bodů X budou pouze tyto dva body.
>
> Jirka: Ano.
>
> O: (Nakreslí další bod X, pro který platí $|\angle AXB| = 75°$.) A co platí pro tento bod X?
>
> Jirka: (Žák měří úhloměrem a tváří se překvapeně.) Ten je taky řešením.
>
> O: Budou ještě nějaké body X, nebo už je to všechno?
>
> Jirka: No, ty souměrné taky. (Narýsuje další body X.) To bude kružnice, vlastně dvě kružnice.
>
> O: A co tento bod. (Organizátorka kreslí bod na kružnici, který je mimo hledaný kružnicový oblouk.)
>
> Jirka: (pohledem ho zavrhne.) Ne, ten je tupý. Tak to budou jenom ty části kružnic, ty větší.

Součástí úlohy bylo hledanou ekvigonálu úsečky AB správně narýsovat. To samostatně zvládli tři žáci, ale pouze jeden z nich dokázal bez pomoci organizátorky svou konstrukci odůvodnit. Zbývající dva žáci měli konstrukci naučenou, ale vůbec nerozuměli jejím jednotlivým krokům. Očekávali jsme, že žáci se pokusí o vysvětlení této konstrukce pomocí vlastností kružnice (využití tečen a tětiv), ale místo toho se spíše snažili využít matematické výpočty. Tento jev jsme zaznamenali u třech žáků.

> O: Jak jsi určil, kde leží střed kružnicového oblouku?
>
> Tonda: No, je určitě na ose úsečky AB, a pak jsem si dopočítal úhel $\angle BAS$

> a ten jsem narýsoval. S je pak jejich průsečík.
> O: A z čeho jsi úhel $\angle BAS$ dopočítal?
> Tonda: Z obvodového a středového úhlu. Z toho vím, že trojúhelník ABS je rovnoramenný a ten úhel $\angle ASB$ je 150°, proto ty ostatní mají každý 15°, protože jsou stejný.

Katka při sestrojení ekvigonály úsečky použila znalost Thaletovy kružnice, od které odvozovala vlastnosti pro střed ekvigonály úsečky.

> Katka: Střed Thaletovy kružnice leží uprostřed úsečky AB, takže střed S (střed ekvigonály úsečky) musí ležet na ose.
> O: Jak určíš, kde přesně na té ose bude ležet?
> Katka: No, když u Thaletovy kružnice je úhel $\angle ABS$ nula, a ten úhel $\angle AXB$ je 90°, tak u těch oblouků musí být taky součet 90° a víme ze zadání, že velikost $|\angle AXB|$ je 75°, takže ten úhel $\angle ASB$ musí být 15°.

Ostatní žáci si matně vybavovali rýsovaní „nějakých“ polopřímek a úhlů, ale přesnou konstrukci nedokázali provést. Proto se je organizátorka snažila navést na správnou konstrukci pomocí znalostí vlastností tětiv a tečen ke kružnici. Ale dva žáci ani pomocí těchto rad na řešení nepřišli a organizátorka jim ho musela předvést.

2. úloha

Ani jeden žák neměl problém odhalit, že v rovnoramenném trojúhelníku splývá výška k základně s její těžnicí. Pouze u jednoho žáka jsme zaznamenali, že se mu pletou pojmy výška a těžnice v trojúhelníku. Ale poté, co mu organizátorka na jeho žádost poradila, úlohu už dokázal vyřešit. Také nikdo z žáků neměl problém s určením těžiště.

Tato úloha byla jedinou nepolohovou úlohou, kterou jsme do výzkumu zařadili. Ukázalo se, že většina žáků si tento pojem nepamatuje nebo ho nezná. Pouze čtyři žáci měli uvedeno, že se jedná o nepolohovou úlohu, ale pouze jeden z nich to zohlednil při určování počtu řešení. U Lukáše, který hned na začátku označil úlohu za nepolohovou, bylo zajímavé, že dále pokračoval v řešení, aniž by nějaký zadaný prvek umístil do roviny.

O: Jak postupuješ poté, co si nakreslíš ilustrační obrázek?

Lukáš: No nějak vymyslím, jak začnu. Já si zvolil přímku p a pak jsem k ní narýsoval rovnoběžku q, aby byly od sebe o to v_m.

O: A jak budeš pokračovat dál?

Lukáš: Zvolím na té přímce p libovolně bod S (střed úsečky KL) a z něj pak udělám kolmici k té přímce p.

Je zajímavé, že také Jirka nezačínal úlohu řešit tím, že by umístil výšku nebo těžnici do roviny, ale opět narýsoval nejprve přímku, a k ní pak kolmici. Při rozhovoru oba uvedli, že je vůbec nenapadlo začít jedním ze zadaných prvků, když neměly dány jejich konkrétní hodnoty.

Dále byla tato úloha jedinou parametrickou úlohou našeho výzkumu, proto jsme se domnívali, že žáci k tomuto faktu přihlédnou a provedou alespoň krátkou diskusi řešitelnosti. To se však nestalo. Ani jeden žák neuvažoval o počtu řešení v závislosti na proměnných. Organizátorka se proto žáků při rozhovoru ptala, jestli jim rýsováním vyšla opravdu všechna řešení, a zda by mohla vzniknout ještě nějaká navíc (popřípadě by se mohla nějaká ztratit), pokud by zvolili jiné délky těžnice t_k a výšky v_m. Pouze dva žáci její radu pochopili a začali se nad hodnotami těžnice t_k a výšky v_m zamýšlet.

Tonda: Aha, takže to znamená, že musím určit vztah mezi t_k a v_m tak, aby ten trojúhelník KLM vznikl?

O: Ano.

Tonda: Takže třeba $t_k < v_m$.

O: Něco takového, ale doporučuji procházet popis konstrukce, a v něm hledat kroky, kdy by mohlo dojít k nesestrojení nějakého průsečíku, popřípadě trojúhelníku KLM.

Tonda: Dobře. Těžiště sestrojím vždycky, tu kružnici (se středem v těžišti a poloměrem $\frac{2}{3}t_k$) a kolmici (přímka kolmá k v_m, která prochází středem úsečky KL) taky, a pak už jen ty body K, L. Tam asi problém není.

O: A stane se vždycky, pro libovolné hodnoty, že se ti kružnice a kolmice protnou?

Tonda: Jasně, když se mi neprotnou, tak nevzniknou body K a L.

O: Ano, přesně tak. A kdy to nastane?

Tonda: No, když ten poloměr kružnice bude menší než vzdálenost těžiště a středu KL.

O: A co když se budou ty hodnoty rovnat?

Tonda: Tak to bude úsečka, takže trojúhelník nevznikne.

Zbývajícím žákům musela organizátorka více poradit a vysvětlit jim, že pokud si zvolí jiné hodnoty těžnice t_k a výšky v_m, pak jim trojúhelník nemusí vůbec vzniknout. I přes veškeré úsilí nebyl jeden žák schopen určit vztah mezi těžnicí t_k a výškou v_m. Bohužel organizátorka neměla možnost využít GeoGebru, aby žákovi situaci ještě lépe přiblížila, a proto musela danému žákovi vztah těchto zadaných prvků prozradit a následně vysvětlit.

Selhání žáků v určení diskuse řešitelnosti vedlo organizátorku při rozhovorech s žáky k otázce:„Vybavuje se ti nějaké úloha ze školy, kde byste museli provádět takovouto diskusi ohledně počtu řešení?“ Většina žáků uvedla, že podobnou úlohu nikdy nedělali, nebo si to nepamatují. Dva maturanti (z pilotní studie) uvedli, že se s diskusí řešitelnosti setkali v jedné nebo dvou úlohách v semináři k maturitě, ale protože jim učitel řekl, že z toho nebude písemka, ani se to neobjeví ve státní maturitě, tak se tomu více nevěnovali.

3. úloha

Tuto úlohu bychom se dovolili označit jako pro žáky nejjednodušší, neboť dva žáci ji měli správně vyřešenou, ostatní s ní měli pouze dílčí problémy. Nikdo z žáků neměl problém s umístěním bodu A libovolně na kružnici k. Také jsme nezaznamenali, že by žáci při rýsování přeskakovali některé kroky v popisu konstrukce, a to ani tehdy, pokud nevěděli, jak se množina z daného kroku rýsuje.

Z hlediska porozumění jednotlivým krokům popisu konstrukce jsme při výzkumu zaznamenali problém pouze s neznalostí znaku τ_{AB}. Dvěma žákům hlavní studie nepomohl ani jeho množinový zápis. Ve dvou případech jsme také narazili na problém s neznalostí konstrukce Thaletovy kružnice, konstrukce ostatních množin a průsečíků žákům nečinila problémy.

Při konstrukci se žáci snažili o narýsování celé množiny, například rýsovali celé kružnice, nikoli pouze jejich části. Přímky a polopřímky zakreslovali v dostatečné délce. Snažili se, aby jim žádný průsečík neunikl. Katka se snažila o co nejvíce přehlednou konstrukci, takže rýsovala pouze jedno řešení.

O: Katko, ten průsečík A_0 lze sestrojit pouze jeden?

Katka: Ne, ještě bude druhý, ale ten jsem nezakreslila.

O: Proč?

Katka: Zbytečně bych tam pak měla moc čar a obrázek by byl nepřehledný. Líp se v tom takhle vyznám. Vadí ti?

O: Ne, zatím ne. A jak poté určíš počet řešení úlohy?

Katka: No, (chvíli přemýšlí), projdu si tu konstrukci znovu, a pak je spočítám.

Když se organizátorka s Katkou dostala v rozhovoru na určení počtu řešení, ukázalo se, že Katka nemá dostatečnou představivost, aby dokázala správný počet řešení určit. Nezbývalo jí nic jiného, než si i další průsečíky narýsovat.

Na rozdíl od Katky, která se snažila o přehlednou konstrukci, se dva žáci do konstrukce tak zamotali, že měli některé průsečíky špatně označeny, a tím měli špatně vyřešenou i celou úlohu. Jejich selhání se projevilo až při rozhovorech, kdy se špatně orientovali ve svém řešení a těžko ho popisovali. Martina byla tak zmatená, že si konstrukci během rozhovoru začala znovu rýsovat, aby dokázala jednotlivé kroky svého postupu popsat.

Problém, ve kterém většina selhala, bylo narýsování dvou různých bodů B (třetí bod popisu konstrukce). Nakreslili si totiž pouze jeden bod B. Což by nevadilo, pokud by ten druhý nezapomněli uvést při určování počtu řešení úlohy. To ale neopomenuli pouze dva žáci, kteří správně určili čtyři řešení zadané úlohy. Ostatní rýsováním sestrojili pouze dva různé trojúhelníky.

Tento fakt jsme porovnali s konstrukcí bodu A_0 (v šestém kroku popisu konstrukce), jako průsečíku dvou již sestrojených množin. Je zajímavé, že žádný žák neopomenul sestrojit i druhý bod A_0. Z toho jsme učinili závěr, že když mají žáci sestrojit bod s nějakou vlastností (např. bod B), soustředí se na jeho konstrukci, nikoli na jeho další možné konstrukce. Pokud je však hledaný bod průsečíkem dvou již sestrojených množin, tak žáci hledají všechna řešení. To potvrdili i rozhovory s žáky, kteří uváděli, že je vůbec nenapadlo zamyslet se nad tím, zda lze provést ještě nějakou další konstrukci bodu B, když už jednu provedli.

4. úloha

Tato úloha je klasickou středoškolskou úlohou, proto jsme se u ní zaměřili i na formální strukturu, podle níž žáci pracují. Ve většině případů si žáci nejprve nakreslili ilustrační náčrt, při kterém vymysleli první kroky konstrukce, poté provedli konstrukci úlohy. Až následně sepsali popis konstrukce a určili počet řešení. Pouze dva žáci po náčrtu provedli i rozbor celé úlohy. Domníváme se, že vynechávání rozboru úlohy vede u žáků ke špatnému určení počtu řešení, který byl velmi častou žákovskou chybou.

Úloha je polohová, ale žáci tento fakt nijak nezohlednili. Dokonce většina z nich začala úlohu řešit volbou libovolné přímky p, ke které pak zkonstruovali kolmici s patou C_0, a bod C pak určili pomocí kružnice se středem v bodě C_0 a poloměrem v_c. Filip dokonce začal úlohu umístěním úsečky AC. V umístění prvního prvku do roviny jim nenapovědělo ani návodné zadání, které začíná slovy „Je dána výška v_c." Jak jsme již zmínili u výsledků 2. úlohy, žáci pojem polohovosti neznají a nepoužívají.

Součástí této úlohy bylo také zjistit, zda žáci dokáží některá řešení, která neodpovídají zadaným hodnotám, z celkového počtu řešení vyloučit. Tento jev se nám však nepodařilo prozkoumat, neboť ani jeden žák nenarýsoval tato přebytečná řešení. Naopak u všech žáků došlo při konstrukci této úlohy ke ztrátě řešení. Hlavní příčinou bylo špatné porozumění dvěma množinám – ekvidistantě přímky a ose úhlu. Místo dvojice přímek stejně vzdálených od dané přímky rýsovali pouze jednu a osu úhlu chápali jako polopřímku, která leží mezi dříve sestrojenými rameny úhlu.

Většina žáků využila ke konstrukci středu kružnice vepsané osu úhlu. Problémem bylo, že žáci nerozlišují mezi pojmy osa dvou různoběžných přímek (viz definice 20) a osa vnitřního úhlu (viz definice 21). V trojúhelníku automaticky předpokládají, že pracují s osou úhlu. Proto u nich docházelo ke ztrátám řešení. Při rozhovorech se tomuto jevu organizátorka věnovala.

O: Co si představíš pod pojmem osa úhlu?

Tereza: No, tu polopřímku uprostřed úhlu.

O: Dobře. A ty máš zadaný přesně ten úhel?

Tereza: Ano (ukazuje na úhel $\angle CAC_0$).

O: A opravdu jsou AC a AC_0 jenom polopřímky?

Tereza: Jo. Nebo vlastně, (dokresluje přímky $\overleftrightarrow{AC}$ a $\overleftrightarrow{AC_0}$) jsou to přímky.

O: Správně. Takže když budeš dělat osu těchto přímek, bude jí tebou narýsovaná polopřímka?

Tereza: Ne, bude to celá přímka.

O: A bude to jenom jedna přímka. Opravdu spolu ty přímky $\overleftrightarrow{AC}$ a $\overleftrightarrow{AC_0}$ svírají jenom jeden úhel?

Tereza: (Chvíli přemýšlí.) Ne, ještě svírají ten druhý. Takže ta osa bude i ta druhá přímka? (Rýsuje kolmici k ose.)

Obdobný rozhovor proběhl se všemi žáky, kteří použili k řešení osu úhlu. Žádný z nich ji neměl narýsovanou správně.

4.4.1 Obtíže žáků z hlediska jevů představených v kapitole 3

V této kapitole se zaměříme na to, zda se i u žáků středních škol projevily stejné obtíže, jako byly identifikovány u žáků základních škol (viz kapitola 3).

Prostor reprezentací vs. teoretický prostor

Během výzkumu se prokázalo, že právě několikerý přechod mezi prostorem reprezentací a teoretickým prostorem v jedné konstrukční úloze je pro žáky náročný. Spousta chyb a špatných úvah pramenila z toho, že žáci po nakreslení náčrtku neudělali rozbor úlohy v teoretickém prostoru, ale začali rovnou rýsovat. Protože i konstrukce probíhá v prostoru reprezentací, žáci měli velké problémy se zobecněním úlohy a určením všech řešení. Například Martina si ve čtvrté úloze nakreslila pouze ilustrační náčrt a úlohu hned začala rýsovat. Podle náčrtku zjistila, že hledaný střed kružnice vepsané leží ve vzdálenosti ρ od stran trojúhelníku. Protože měla dvě strany určeny, začala rýsovat rovnoběžné přímky s těmito stranami ve vzdálenosti ρ. Ke každé straně však nakreslila pouze jednu rovnoběžku, a to takovou, která na náčrtku procházela vnitřkem trojúhelníku. Kdyby provedla obecný rozbor úlohy v teoretickém prostoru, určila by, že střed kružnice vepsané leží na ekvidistantách přímek, jejichž součástí jsou strany trojúhelníku, a tím by nepřišla o další řešení úlohy.

S druhou úlohou, která byla parametricky zadána, pracovali žáci jako s úlohou s konkrétními hodnotami zadaných prvků, zvolili si nějaké konkrétní, i když libovolné, hodnoty pro t_k a v_m a s těmi dále pracovali. Bylo pro ně obtížné přemýšlet o úloze v teoretickém prostoru. To se také projevilo, když měli určit kompletní řešení této úlohy. Žáci určili počet řešení pouze pro jimi zvolené konkrétní délky, nikoli však pro obecné hodnoty. Většina z nich byla při rozhovoru překvapena, že jejich určení počtu řešení není závěrem této úlohy. Jenom dva žáci po upozornění organizátorkou řešení úlohy zobecnili s ohledem na její obecné zadání. Tím se nám prokázalo, že si žák neuvědomuje, že jeho konstrukce je pouze jedním reprezentantem obecné množiny řešení.

Obecnost vs. konkrétnost

Obecné zadání v první úloze nedělalo žákům žádné problémy. Všichni narýsovali úsečku AB libovolné délky.

Ve druhé úloze se s obecně zadanými prvky potýkali hůře. Jedna žákyně při rozhovoru uvedla, že v celé této úloze ji právě obecně zadané prvky činily největší problémy, a že si vůbec nebyla jistá svým řešením. Petr si nechtěl připustit, že by měl pracovat s obecně zadanými prvky, a proto se snažil nějaké konkrétní hodnoty najít. Využil k tomu znalost kolmosti výšky.

> Petr: Ta t_k je, protože to je zároveň výška, kolmá k $\overleftrightarrow{KL}$ a úhel mezi nimi je 90°.
> O: Ano, to je správná myšlenka. A co dál?
> Petr: No, snažil jsem se dopočítat ostatní úhly. Ale nevěděl jsem jak. (Chvíli přemýšlí.) Tak jsem začal rýsovat a ten úhel (ukazuje na úhel $\angle LKM$) jsem nějak odhad, že bude 70°. A pak už to v pohodě šlo dodělat.

Organizátorka výzkumu Petra následně upozornila, že v geometrii nelze nic „nějak odhadnout“ a pokusila se mu poradit, ať začne řešit úlohu znova tak, že umístí jeden ze zadaných prvků do roviny, a pokud mu to pomůže, ať si k zadaným prvkům zvolí konkrétní délky. To Petrovi velice pomohlo a úlohu už pouze s malou dopomocí dokázal vyřešit.

Obecnost druhé úlohy se však nejvíce projevila při určování počtu řešení a diskusi řešitelnosti. Ukázalo se, že všichni žáci považují za řešení úlohy ty, které se jim podaří narýsovat (pět žáků navíc vždy rýsovalo pouze jediné řešení). Téma počtu řešení musela tedy organizátorka výzkumu s žáky při rozhovoru rozebírat.

> O: Kolik bude mít úloha řešení?
>
> Lucka: Asi jedno, vyšlo mi to rýsováním.
>
> O: A nemohla jsi při rýsování na něco zapomenout?
>
> Lucka: Ne, narýsovala jsem postupně všechny kroky.
>
> O: Tak si znovu projdi postupně všechny kroky popisu konstrukce a u každého bodu přemýšlej, jestli jsi nezapomněla narýsovat nějaký průsečík.
>
> Lucka: (Postupně prochází jednotlivé kroky popisu konstrukce) Těžiště je jenom jedno, kružnice l také (myslí kružnici $l(T, \frac{2}{3}t_k)$. Takže řešení je jedno.
>
> O: Ještě nejsme na konci popisu konstrukce, takže pokračuj. Na závěry je ještě brzy.
>
> Lucka: No, tak dál už jsou jenom body K, L. Ten bod K průsečík l a p (p je kolmice k v_m, která prochází středem úsečky KL). Takže to je ten K.
>
> O: A co když si tu kružnici narýsuješ celou?
>
> Lucka: (představí si celou kružnici) Aha, pak může být ještě jeden bod K, takže řešení jsou dvě.

Tím se u Lucky projevil další jev, který žákům může znemožnit správné určení počtu řešení, a to je rýsování pouze částí daných množin.

Problematika prototypů

Při kreslení náčrtů se potvrdila naše hypotéza, že žáci si budou kreslit ostroúhlý trojúhelník. Navíc se také často stávalo, že si žáci načrtli rovnostranný trojúhelník a z něho odvozovali vlastnosti pro trojúhelník obecný. Například Lucka se ve čtvrté úloze na základě špatného náčrtku domnívá, že bod dotyku kružnice vepsané splyne s patou výšky.

Ve druhé úloze jsme místo obvyklého značení $\triangle ABC$ zvolili pro vrcholy trojúhelníku označení K, L, M. Z rozhovorů s žáky jsme zjistili, že žákům středních škol netradiční označení trojúhelníku nečiní problémy.

Za prototypické můžeme také považovat jevy, kdy se žáci při rýsování snaží dodržet standardní zobrazení trojúhelníku, tedy úsečku AB narýsovat ve vodorovné poloze. To se projevilo například ve čtvrté úloze, kdy pouze jeden žák narýsoval výšku CC_0 vodorovně, ostatní ji rýsovali ve svislé poloze. Nedokázali se totiž odpoutat od vizuální představy umístěného trojúhelníku v rovině.

Problematika porozumění pojmům, zápisům, terminologii,...

Napříč úlohami jsme u žáků zaznamenali problém správného určení množiny bodů dané vlastnosti. A to nejen v první úloze, která byla na tento jev zaměřena, ale i při hledání řešení druhé a čtvrté úlohy. Žáci často opomíjeli, že ekvidistantou přímky jsou dvě rovnoběžné přímky, ekvigonálu úsečky tvoří dva kružnicové oblouky, a že osou úhlu dvou přímek není pouze jedna přímka. Na základě těchto mylných úvah pak žáci ztráceli řešení v daných úlohách.

U jednoho žáka jsme navíc v první úloze narazili na problém porozumění tomu, co znamená formulace „určete množinu bodů X“. Během rozhovoru vyplynulo, že žák hledal plochu, kterou vyplní sestrojené trojúhelníky ABX. Nejprve se domníval, že výsledkem bude „výseč“ bodů ohraničená stranami trojúhelníku ABX, a poté pouze obvod konkrétního trojúhelníku ABX. Až po diskusi s organizátorkou žák pochopil, že hledá útvar, který tvoří množina všech bodů X s danou vlastností.

Korektnost konstrukce

Žáci se během prováděné studie snažili o korektní konstrukce. Většina z nich rýsovala celé kružnice i dostatečné reprezentace přímek, aby jim neunikl žádný průsečík. I kvalita rýsování byla dobrá.

Ve čtvrté úloze se nám prokázal předpokládaný jev, kdy žáci měli problém s narýsováním tečny ke kružnici z daného vnějšího bodu C (při neznalosti společného bodu dotyku). Pouze jeden žák během samostatné práce zkonstruoval tečnu pomocí Thaletovy kružnice. Ostatní žáci na dotaz organizátorky uvedli, že „tam tu tečnu odhadem nějak narýsovali“. Správnou konstrukci provedli až při rozhovoru a za pomoci rad organizátorky.

Aneta k řešení tohoto jevu využila znalosti geometrických zobrazení, konkrétně osovou souměrnost.

> O: Jak sestrojíš hledanou tečnu $\overleftrightarrow{CB}$?
> Aneta: Využiju toho, že vím, že přímka $\overleftrightarrow{CS}$ (S je střed dané kružnice, která je kružnicí vepsanou) je osa úhlu $\angle ACB$, kde jedno rameno úhlu mám (ukazuje na polopřímku $\overrightarrow{CA}$) a druhé rameno $\overrightarrow{CB}$ potřebuju sestrojit.
> O: Zajímavé, a jak ho sestrojíš?
> Aneta: To je už snadné. Zvolím nějaký bod na přímce $\overleftrightarrow{CA}$, třeba A a přenesu ho na druhou stranu podle přímky $\overleftrightarrow{CS}$. (Využije osovou souměrnost podle přímky $\overleftrightarrow{CS}$.)

Aneta byla jedinou žákyní ve výzkumu, která při řešení úloh využívala geometrická zobrazení, která jsme uvedli v kapitole 2.3.

Role jednotlivých částí konstrukční úlohy

- **ROZBOR**

  Za pozornost stojí způsob, jakým žáci vnímali rozbor úlohy. Většina žáků si pro ilustraci nakreslila malý obrázek, do kterého zakreslili prvky ze zadání, krátce popřemýšleli nad řešením úlohy a šli ji hned rýsovat. Při rýsování pak vymýšleli, jak postupovat a úlohu dořešit.

  > O: Jak postupuješ při řešení úlohy?
  > Lucka: No, nejprve si udělám rychlej náčrtek, abych si dokázal představit situaci, a pak jdu hned rýsovat.

O: Takže nijak nevymýšlíš řešení během kreslení obrázku?

Lucka: Jo, to jo, vymyslím, jak začnu, a pak jdu rýsovat. A když nevím, jak dál, tak se vrátím k náčrtku.

Pouze dva žáci prováděli s náčrtem i rozbor celé úlohy. Ten se snažili zapsat pomocí symbolického zápisu.

- **POPIS KONSTRUKCE**

Ve třetí úloze se nám potvrdilo, že pro žáky je mnohem jednodušší ze zadaného popisu konstrukce provést konstrukci, než na základě narýsovaného útvaru sepsat správně popis konstrukce. Z rozhovorů s organizátorkou výzkumu jsme se dozvěděli, že je pro žáky obtížné pamatovat si všechny symbolické zápisy, jak se který prvek zapisuje a navíc neopomenout žádnou podmínku. Také žák průmyslové školy, který měl se zápisy největší problémy, byl překvapen, když ho organizátorka vyzvala, aby svůj postup zapsal spíše slovy než pomocí symboliky. Domníval se, že takový zápis není úplný, a tedy ani korektní.

Během zápisů konstrukce ve druhé a čtvrté úloze se u žáků objevili různé chyby, například $S_m \in p$ pro zápis přímky procházející bodem a $o_{\angle ACX}$ pro zápis osy úhlu. Často byl k zápisu používán ještě nesestrojený bod, nebo byla zapsána konstrukce množiny, která dále nebyla využita k řešení úlohy. Také bylo zajímavé sledovat, jak žáci ve druhé úloze zapíší konstrukci těžiště. Objevily se tyto zápisy (některé jsou dokonce nepřesné):

$$T; |TS_{KL}| + |TM| = v_m$$

$$T; H(M, \tfrac{2}{3}v_m) : S_{KL} \to T$$

$$T; T \in S_{KL}M, |MT| = 2 \cdot |TS_{KL}|.$$

Když s žáky tento zápis těžiště organizátorka řešila a navrhla jim, zda by mohli svůj zápis nahradit zápisem slovním, žáci tomu moc nedůvěřovali. Tvrdili, že popis musí být vždy „napsán pomocí znaků“, aby byl správný. Pouze studenti gymnázia z pilotní studie měli těžiště zapsáno slovně. V rozhovoru uvedli, že jim učitel zdůrazňuje, že ne všechno musí být zapsáno pomocí symbolických znaků.

Z rozhovorů organizátorka zjistila, že žáci preferují nejprve náčrt (pro ilustraci situace) a rýsování hledaného útvaru a popis konstrukce provádí až následně. Filip při rozhovoru uvedl: „popis konstrukce, to je jen zápis pro učitele, aby věděl, jak jsem při rýsování postupoval, jinak bych ho psát nemusel.“ Ani ostatní žáci nevnímali popis konstrukce jako stěžejní část řešení.

- **ZKOUŠKA SPRÁVNOSTI**
  Žáci zkoušku ani jakékoli zamyšlení nad správností jejich řešení neprovádí. Po dopsání popisu konstrukce určí počet řešení, většinou na základě počtu narýsovaných hledaných útvarů, a více nad úlohou nepřemýšlí.

4.5 Diskuse

Z námi předpokládaných jevů, se kterými by měli mít žáci střední školy při řešení konstrukčních úloh problémy, se některé z nich nepotvrdily, což svědčí o zvýšení jejich znalostí a zlepšení matematického uvažování od dob, kdy byli na základní škole. Příklady těchto jevů jsou: schopnost žáka určit bod libovolně na kružnici, sestrojit útvary libovolné délky libovolně v rovině, pracovat s matematickou symbolikou i s netradičním označením trojúhelníku a dalších útvarů.

Velice nás ale zaujalo, jaké problémy měli žáci s určením diskuse řešitelnosti (ve druhé úloze). Domníváme se, že to má hned několik důvodů. Ten první spatřujeme v nedostatku parametricky zadaných konstrukčních úloh ve středoškolských učebnicích. Například v učebnici [19] nenajdeme ani jednu parametrickou úlohu. Další důvod souvisí s neporozuměním tomu, co je finálním výsledkem konstrukční úlohy. Většina žáků při rozhovoru potvrdila, že je pro ně řešením konstrukční úlohy narýsování hledaného útvaru (alespoň jednoho). Náčrt chápou pouze jako pomocnou složku, když si nevědí rady, a popis konstrukce jako nutnou součást řešení, která je podle mnohých z nich nadbytečná. Určení počtu řešení se sice ve většině žákovských řešení objevilo, ale bylo spíše nesprávné. Buď žáci vycházeli při určení počtu řešení ze své konstrukce a spočítali pouze narýsovaná řešení (rýsují převážně jedno řešení), nebo si sice uvědomili možnost sestrojení dalších průsečíků, ale nedokázali k nim bez narýsování celé situace dopočítat všechna řešení. Další důvod chybného určení počtu řešení souvisí s prováděním zkoušky správnosti. Ani jeden žák se kontrolou svého řešení nezabýval, což vedlo také ke špatným závěrům z hlediska počtu řešení. Proto se domníváme, že je důležité, aby se ve výuce kladl důraz na porozumění smyslu konstrukční úlohy, aby se připomínala důležitost všech částí formální struktury konstrukční úlohy, a aby byly do výuky zařazovány parametricky zadané úlohy.

Druhá hypotéza se týkala množin bodů dané vlastnosti a jejich využití v konstrukčních úlohách. Ukázalo se, že žáci mají znalosti daných množin, umí je definovat i pojmenovat, ale pokud mají určit množinu bodů, na které leží hledaný bod, provedou chybné úvahy. Například žáci znají definici ekvidistanty přímky, vědí, že se jedná o dvojici rovnoběžných přímek, ale pokud mají určit množinu, která je od dané přímky vzdálena o danou vzdálenost, narýsují pouze jednu rovnoběžku, a tím dojde ke ztrátě řešení. Proto je podle našeho názoru důležité, při výuce konstrukčních úloh zdůrazňovat množiny bodů, které se k řešení jednotlivých úloh používají, a také dávat žákům zpětnou vazbu k chybným úvahám, kterých se dopustí. Tím by mělo dojít k propojení znalosti množin bodů s jejich využitím.

Při přípravě výzkumu jsme předpokládali, že žáci budou kreslit malé, nepřehledné náčrty, které budou navíc prototypické, což se nám potvrdilo. To, co jsme ale ve třetí hypotéze neočekávali, byla absence analýzy celé situace dané úlohy a obecné určení jejího řešení. Většina žáků po nakreslení ilustračního obrázku hned začala rýsovat, a teprve při konstrukci promýšlela postupné kroky, které by mohly vést k řešení úlohy. Když nevěděli jak dál, vrátili se zpět k náčrtu, v němž vymýšleli další kroky. Tímto postupem docházelo k chybným závěrům, ztrátě řešení, ale také k získání nadbytečných řešení. Je proto nezbytné, aby žáci porozuměli důležitosti kompletního rozboru situace hned na začátku řešení dané úlohy, a tím se vyhnuli následných nesprávným úvahám.

Seznam zkratek

AB	úsečka s krajními body A a B
$\lvert AB \rvert$	velikost úsečky AB
$\overrightarrow{AB}$	polopřímka s počátečním bodem A a vnitřním bodem B
$\overleftrightarrow{AB}$	přímka procházející body A, B
$\overleftrightarrow{ABC}$	polorovina s hraniční přímkou $\overleftrightarrow{AB}$ a vnitřním bodem C
$\angle AVB$	úhel s vrcholem V a rameny $\overrightarrow{VA}, \overrightarrow{VB}$
$\lvert\angle AVB\rvert$	velikost úhlu $\angle AVB$
A, B, C	vrcholy trojúhelníku
a, b, c	délky stran trojúhelníku
α, β, γ	velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku
A_1, B_1, C_1	středy stran
o_a, o_b, o_c	osy stran
t_a, t_b, t_c	těžnice
T	těžiště
v_a, v_b, v_c	výšky v trojúhelníku
A_0, B_0, C_0	paty výšek
O	ortocentrum
S	střed kružnice opsané trojúhelníku
r	poloměr kružnice opsané
V	střed kružnice vepsané
ρ	poloměr kružnice vepsané
$o_\alpha, o_\beta, o_\gamma$	osy vnitřních úhlů trojúhelníku
τ_{AB}	Thaletova kružnice nad průměrem $d = \lvert AB\rvert$

Seznam obrázků

Závěr

V naší práci jsme se věnovali obtížím žáků středních škol s konstrukčními úlohami v trojúhelníku, hlavně jejich řešení pomocí množin bodů dané vlastnosti. Závěry, které jsme z výzkumu získali, nejsou samozřejmě uceleným a kompletním pohledem na danou problematiku, neboť jsme pracovali pouze s omezeným množstvím žáků vybraných středních škol. Výsledky nám však mohou posloužit jako široké spektrum jevů, se kterými se středoškolští žáci v tomto tématu potýkají a mají s nimi nemalé problémy.

Z výsledků našeho výzkumu (jak pilotní, tak hlavní studie) jsme určili následující žákovské problémy:

- žáci znají množiny bodů dané vlastnosti, avšak mají problémy je v konstrukčních úlohách správně použít, zejména ekvidistantu přímky a osu úhlu,
- žáci ovládají konstrukce jednotlivých množin bodů, výjimkou je konstrukce ekvigonály úsečky,
- žáci kreslí prototypické obrázky, a proto dělají chybné úvahy,
- žáci neprovádějí nejprve kompletní rozbor úlohy, ale pouze kreslí ilustrační obrázek, a postupné kroky vedoucí k řešení úlohy vymýšlí až při samotné konstrukci,
- žáci se při popisu konstrukce soustředí na symbolický zápis, ve kterém dělají chyby, místo toho, aby využili správný slovní popis,
- žáci nerozlišují mezi nepolohovou a polohovou úlohou, což se projevuje při konstrukci, kde začínají umístěním nesprávného prvku do roviny, ale také při určování počtu řešení,

- žáci se v konstrukčních úlohách nezabývají ověřením správnosti svého postupu, ani neprovádí diskusi řešitelnosti parametrické úlohy, což vede k chybnému určení počtu řešení dané úlohy.

Při porovnání středoškolským žáků našeho výzkumu se studií prováděnou se žáky základních škol je patrné, že některým chybám se starší žáci už dokáží vyvarovat, ale v některých i nadále selhávají. Zásadní problém spatřujeme v žákovském neporozumění smyslu konstrukční úlohy. Tím, že se žáci soustředí hlavně na rýsování, popřípadě popis konstrukce, jim uniká hlavní podstata konstrukční úlohy – důkaz existence hledaného útvaru a určení všech jeho možných řešení. Cílem konstrukční úlohy není nalézt, či narýsovat jednoho reprezentanta hledané množiny, jak se žáci domnívají, ale určit všechna řešení v závislosti na zadaných prvcích a jejich parametrech.

Ve výzkumu jsme žákům povolili pouze rýsovací potřeby, ale bylo by určitě zajímavé sledovat změny chybovosti žáků, pokud bychom jim umožnili pracovat i s programy, jako jsou Cabri či GeoGebra. Protože však v žádné z námi oslovených škol tyto programy ve výuce nepoužívají, do výzkumu jsme je nezařadili.

Dále by bylo zajímavé rozšířit náš výzkum o studii s dalšími žáky, například s těmi, kteří se danou problematikou zabývají aktuálně během učiva ve škole, a tak mít možnost porovnat, co si žáci pamatují i s odstupem času, a co umí pouze krátkodobě. Také jsme chtěli náš výzkum obohatit o pohled učitelů matematiky na zkoumanou problematiku a moci ho následně porovnat s výsledky jejich žáků, ale to se nám kvůli dlouhodobému přesunu výuky do online prostoru nepodařilo.

Celkově byl pro nás výzkum obohacením, uvědomili jsme si obsáhlost konstrukčních úloh a s tím související množství jevů, ve kterých mohou žáci chybovat. Navíc bylo zajímavé pozorovat žáky při samostatné práci i při rozhovorech, neboť každý žák má svůj osobitý styl řešení úloh i jejich popisování. Díky tomu, že rozhovory nenásledovali hned po sobě, ale odehrávaly se v jiných dnech, měla organizátorka možnost reflexe svého projevu i žákova přístupu i postupu v jednotlivých úlohách. To bylo přínosem pro její další reakce a případné návodné rady v dalších rozhovorech.

Literatura

[1] BALADA, Jan. *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia: RVP G.* Praha: Výzkumný ústav pedagogický v Praze, 2007. ISBN 978-80-87000-11-3.

[2] BOČEK, Leo a Jaroslav ZHOUF. *Planimetrie.* 2. rozš. vyd. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2012. ISBN 978-80-7290-594-2.

[3] BOGOMOLNY, Alexander. *The angle bisectors* [online]. 1996–2018 [cit. 18. 9. 2020]. Dostupné z: `https://www.cut-the-knot.org/triangle/ABisector.shtml`

[4] BOGOMOLNY, Alexander. *What is angle* [online]. 1996–2018 [cit. 6. 5. 2020]. Dostupné z: `https://www.cut-the-knot.org/WhatIs/WhatIsAngle.shtml`

[5] BOUCNÍK, Pavel. *Odmaturuj! z matematiky 3.* 3. vydání. Brno: Didaktis, 2004. Odmaturuj! ISBN 80-7358-010-1.

[6] HEJNÝ, Milan a kol. *Teoria vyučovania matematiky 2. (Žlutá kniha).* Bratislava: SPN, 1990.

[7] HEJNÝ, Milan, Jarmila NOVOTNÁ a Naďa VONDROVÁ, eds. *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky.* Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2004. ISBN 80–7290–1893.

[8] KADLEČEK, Jiří. *Geometrie v rovině a v prostoru pro střední školy.* Praha: Prometheus, 1996. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-7196-017-9.

[9] KRYNICKÝ, Martin. *www.realisticky.cz* [online]. 2010 [cit. 27.3.2020]. Dostupné z: `http://www.realisticky.cz/`

[10] KURKA, Štěpán. *Konstrukční úlohy – Univerzita Karlova* [online]. 2010 [cit. 15. 1. 2021]. Dostupné z: `https://dspace.cuni.cz/handle/20.500.11956/33948`

[11] KUŘINA, František. *Deset pohledů na geometrii.* Praha: Matematický ústav AV ČR, 1996. ISBN 80-85823-21-7.

[12] LABORDE, Colette. *The Hidden Role of Diagrams in Students' Construction of Meaning in Geometry.* In: Kilpatrick J., Hoyles C., Skovsmose O., Valero P. (eds) Meaning in Mathematics Education. Mathematics Education Library, vol 37. Springer, New York, NY, 2005. ISBN 978-0-387-24039-8.

[13] LEISCHNER, Pavel. *Metody řešení planimetrických úloh.* Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta, 2012. ISBN 978-80-7394-378-3. Dostupné z: `https://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/MRG/plani.pdf`

[14] LEISCHNER, Pavel. *O některých nedostatcích výuky školské geometrie.* Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích [online]. 2012 [cit. 27. 4. 2020]. Dostupné z: `https://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/MRG/nedo.pdf`

[15] LEISCHNER, Pavel. O některých nedostatcích ve výuce středoškolské geometrie. In: HROMADOVÁ, Jana a Antonín SLAVÍK, ed. *Cesty k matematice III: Sborník konference 2018.* Praha: MatfyzPress, 2018, str. 32-42. ISBN 978-80-7378-373-0.

[16] MOLNÁR, Josef. *Matematika pro střední odborné školy: Planimetrie.* Praha: Prometheus, 2011. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-415-5.

[17] PAVLÍČEK, Jan Baptista. *Základy neeukleidovské geometrie Lobačevského.* Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1953. Dostupné z: `https://dml.cz/data/handle/10338.dmlcz/402750/monography.pdf`

[18] POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky.* 5. přeprac. vyd. Praha: SPN, 1991. Knižnice všeobecného vzdělání. ISBN 80-04-22885-2.

[19] POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia: planimetrie.* 4. upr. vydání. Praha: Prometheus, 2000. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-7196-174-4.

[20] RENDL, Miroslav a Naďa VONDROVÁ. *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů.* Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2013. ISBN 978-80-7290-723-6.

[21] ŠVRČEK, Jaroslav. *Vybrané kapitoly z geometrie trojúhelníka: [učební text pro posluchače pedagogické fakulty Univerzity Karlovy].* 1.vydání. Praha: Karolinum, 1998. ISBN 80-7184-584-1.

[22] VONDRA, Jan, Dana GAZÁRKOVÁ, et al. *Matematika pro střední školy: 3. díl, Planimetrie.* Brno: Didaktis, 2013. ISBN 978-80-7358-211-1.

[23] VONDROVÁ, Naďa a Miroslav RENDL. *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků.* V Praze: Univerzita Karlova, nakladatelství Karolinum, 2015. ISBN 978-80-246-3234-6.

[24] VONDROVÁ, Naďa, Radka HAVLÍČKOVÁ, Miroslav RENDL a Jana ŽALSKÁ. *Kritická místa matematiky základní školy: Metod. materiál pro učitele* [online]. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2015. [cit. 3. 2. 2021]. Dostupné z: `http://mdisk.pedf.cuni.cz/Nada/Manu%C3%A1l%20Kritick%C3%A1%20m%C3%ADsta%20matematiky%20na%20z%C3%A1kladn%C3%AD%20%C5%A1kole%20final.pdf`

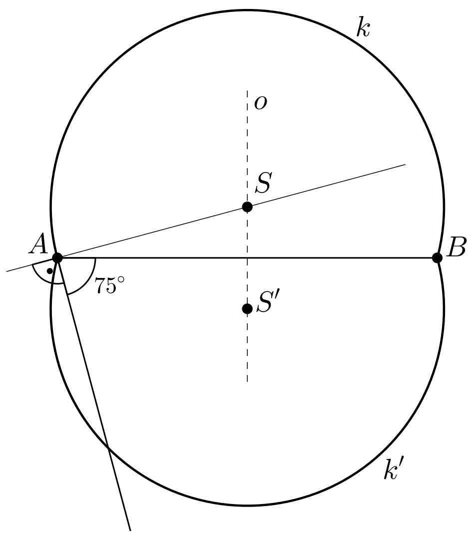
[25] VYŠÍN, Jan a kol.*Geometrie pro pedagogické fakulty.* Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1965. Učebnice vysokých škol (SPN).

Příloha

Řešení úloh hlavní studie

1. Je dána úsečka AB. Určete a narýsujte množinu všech bodů X, pro které platí $|\angle AXB| = 75°$.

Řešení: (viz obrázek 4.1) Hledanou množinou je sjednocení dvou kružnicových oblouků k, k' s krajními body v zadaných bodech A, B, bez bodů A, B. Střed S kružnicového oblouku k leží na ose o úsečky AB (střed leží vždy na ose úsečky k tětivě). Střed S dále leží na kolmici k libovolné tečně. Protože známe obvodový úhel kružnice k (a máme znalost, že obvodový a úsekový úhel jsou shodné), pak narýsujeme tečnu z vrcholu A (může být i vrchol B) s úhlem 75° a k ní kolmici. Střed S' kružnicového oblouku k' je pak osově souměrný se středem S podle přímky $\overleftrightarrow{AB}$.



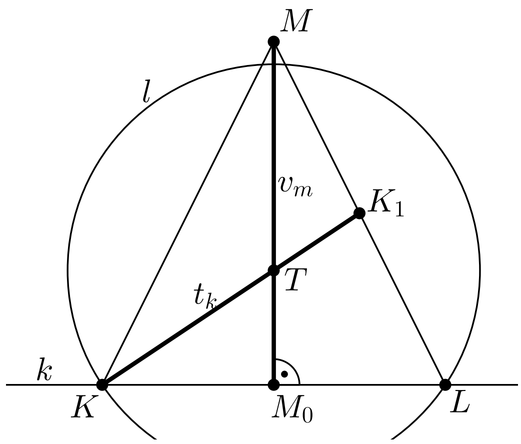
Obrázek 4.1: Konstrukce první úlohy z hlavní studie

2. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník KLM, když znáte velikosti výšky v_m a těžnice t_k.

Řešení: Úloha je nepolohová, prvky jsou zadány parametricky, zvolíme umístění výšky v_m do roviny.

Rozbor: (viz obrázek 4.2)

Umístíme výšku MM_0 o velikosti v_m do roviny a sestrojíme její kolmici k. Výška k základně v rovnoramenném trojúhelníku je zároveň těžnicí, takže sestrojíme těžiště T (pomocí čtvrté geometrické úměrné). Vrchol K leží na kolmici k a na kružnici l se středem v bodě T a poloměru $\frac{2}{3}t_k$. Zbývající vrchol L leží také na kolmici k a zároveň je středově souměrný s vrcholem K podle bodu M_0.



Obrázek 4.2: Náčrt a konstrukce druhé úlohy z hlavní studie

Popis konstrukce:

1. MM_0; $|MM_0| = v_m$
2. T; T je těžiště těžnice v_m
3. k; $k \perp MM_0 \wedge M_0 \in k$
4. l; $l(T, \frac{2}{3}t_k)$
5. $K; K \in \ l \cap k$
6. $L; L \in \ l \cap k \wedge L \neq K$
7. $\triangle KLM$

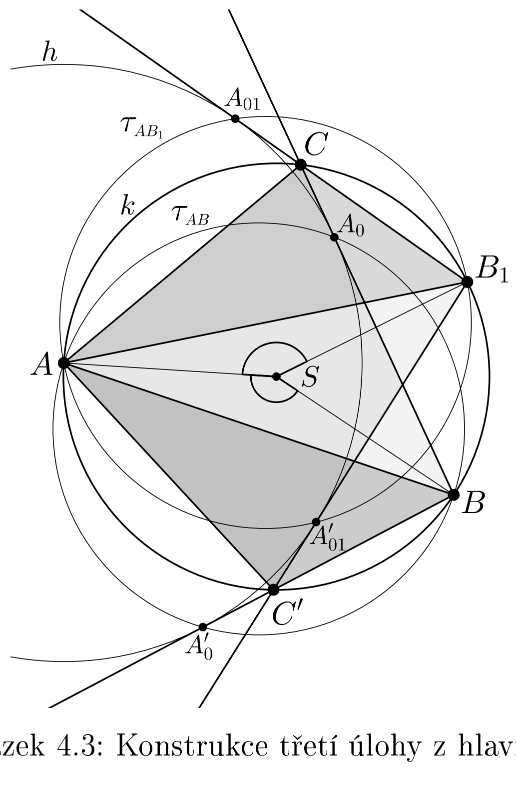
Diskuse řešitelnosti: Pro existenci trojúhelníku KLM je podstatná konstrukce průsečíku K. Pokud poloměr kružnice l bude menší, nebo roven velikosti $|TM_0|$, trojúhelník nevznikne. To nastane pouze v případě, když $\frac{2}{3}t_k \leq \frac{1}{3}v_m$.

Počet řešení: Protože je úloha nepolohová má 1 řešení, i když konstrukcí vzniknou 2 shodné trojúhelníky (osová souměrnost podle výšky v_m).

3. Proveďte konstrukci podle zadaného popisu konstrukce. Kolik bude mít úloha řešení?

   1) k; $k(S, 2, 5\ cm)$
   2) A; $A \in k$
   3) B; $B \in k\ \wedge\ |\angle ASB| = 150°$
   4) h; $h(A, 3, 5\ cm)$
   5) τ_{AB}; $\tau_{AB} = \{X \in \rho : |\angle AXB| = 90°\}$
   6) A_0; $A_0 \in h\ \cap\ \tau_{AB}$
   7) C; $C \in k\ \cap \overrightarrow{BA_0}$
   8) $\triangle ABC$

Řešení:



Obrázek 4.3: Konstrukce třetí úlohy z hlavní studie

Z popisu konstrukce nelze vyčíst polohovost úlohy ani zadané prvky a jejich metrické hodnoty. Proto má úloha 4 řešení (po dvou shodná), která vznikla konstrukcí (viz obrázek 4.3).

4. Je dána výška v_c o velikosti $|CC_0| = 3\ cm$. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li délka strany $b = 4\ cm$ a velikost poloměru kružnice vepsané $\rho = 1\ cm$.

Řešení: Jedná se úlohu 5 vyřešenou v teoretické části naší práce, proto její řešení už zde neuvádíme.